Предисловие

Изначально данное пособие было написано с целью помочь студентам специальности «Прикладная информатика» при выполнении домашней контрольной работы по курсу «Алгебра и геометрия», поэтому пособие делится на две основные части: примеры решения задач и варианты индивидуальных заданий. (В последних двух работах бо́льшая часть заданий взята из сборника задач [3], который в настоящее время мало переиздается и постепенно становится библиографической редкостью.) В конце книги, как приложение, приведены некоторые теоретические сведения и формулы, по большей части касающиеся тех разделов, которые относительно редко освещаются в учебниках и справочниках по высшей математике.

При работе с пособием следует учесть, что оно охватывает не все виды задач, которые необходимо уметь решать студентам математических специальностей. Так, в пособии нет задач на определители низших порядков и на основные операции с матрицами (предполагается, что при выполнении работы по теме «Линейная алгебра» студент уже знаком с этими разделами алгебры, поэтому вычисление определителей или перемножение матриц, возникающее при решении задач, никак не комментируется). В работе по теме «Аналитическая геометрия» содержатся лишь наиболее простые и типичные примеры задач, особенно это касается тем «Уравнения прямой на плоскости» и «Уравнения прямой и плоскости в пространстве». Тем, кто желает научиться решать более сложные задания, следует обратиться к сборникам задач по аналитической геометрии.

Задание 5. Записать круговые многочлены $X_1(t), X_2(t)$, $X_3(t)$, $X_5(t)$, $X_7(t)$, $X_4(t)$, $X_{25}(t)$, $X_8(t)$, $X_{34}(t)$, $X_{52}(t)$, $X_{130}(t)$. (В последнем случае представить ответ как частное двух многочленов.)

Решение.

а) Здесь $n = 1$. Единственный имеющийся корень

$$\varepsilon_0 = \cos\left(\frac{2\pi \cdot 0}{1}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi \cdot 0}{1}\right) = 1$$

является первообразным. По определению кругового многочлена

$$X_1(t) = t - \varepsilon_0 = t - 1.$$

б) В случае $n = 2$ существуют два корня из единицы: $\varepsilon_0 = 1$ и $\varepsilon_1 = -1$. Первообразным будет только ε_1, так как $\varepsilon_0 = 1$ уже появлялось в предыдущий раз. Таким образом,

$$X_2(t) = t - \varepsilon_1 = t + 1.$$

в) При $n = 3$ имеются три корня из единицы:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0 = 1,\\
&\varepsilon_1 = \cos\Big(\frac{2\pi \cdot 1}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{2\pi \cdot 1}{3}\Big) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\\
&\varepsilon_2 = \cos\Big(\frac{2\pi \cdot 2}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{2\pi \cdot 2}{3}\Big) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,
\end{aligned}$$

среди которых два первообразных: ε_1 и ε_2 (дроби $1/3$ и $2/3$ несократимы). На сей раз проще представить круговой многочлен в виде

$$X_3(t) = \frac{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_1)(t-\varepsilon_2)}{t-\varepsilon_0} = \frac{t^3-1}{t-1} = t^2 + t + 1.$$

Мы использовали тот факт, что произведение *всех* сомножителей вида $(t - \varepsilon_k)$, где $\varepsilon_k^n = 1$, должно давать нам $t^n - 1$:

$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_1)\cdot\ldots\cdot(t-\varepsilon_{n-2})(t-\varepsilon_{n-1}) = t^n - 1,$$

потому что $\varepsilon_k, k = 0\ldots n-1$ — это *все* корни уравнения $t^n - 1 = 0$. С помощью этого правила легко находить круговые многочлены $X_p(t)$, где p — простое число.

г) Найдем $X_5(t)$. Число $n = 5$ — простое, поэтому среди корней ε_0, ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 первообразными будут все, кроме ε_0 (все дроби 1/5, 2/5, 3/5 и 4/5 несократимы). Таким образом,

$$X_5(t) = \frac{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_1)(t-\varepsilon_2)(t-\varepsilon_3)(t-\varepsilon_4)}{t-\varepsilon_0} = \frac{t^5-1}{t-1} = t^4+t^3+t^2+t+1.$$

д) Аналогичным образом находим $X_7(t)$:

$$X_7(t) = \frac{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_1)\cdot\ \ldots\ \cdot(t-\varepsilon_6)}{t-\varepsilon_0} = \frac{t^7-1}{t-1} = t^6+t^5+t^4+t^4+t^3+t^2+t+1.$$

е) Теперь найдем $X_4(t)$. На сей раз среди корней $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ только два первообразных: ε_1 и ε_2, поэтому

$$X_4(t) = \frac{t^4 - 1}{(t - \varepsilon_0)(t - \varepsilon_2)}.$$

Вместе с тем корни ε_0 и ε_2, соответствующие показателю степени $n = 4$, совпадают с корнями ε_0 и ε_1 для показателя $n = 2$ $\left(\frac{0}{4} = \frac{0}{2},\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\right)$, следовательно,

$$(t - \varepsilon_0)(t - \varepsilon_2) = t^2 - 1$$

и

$$X_4(t) = \frac{t^4 - 1}{t^2 - 1} = t^2 + 1.$$

ж) Точно так же можно находить любые многочлены вида $X_{p^2}(t)$, где p — простое число.

$$X_{25} = \frac{(t - \varepsilon_0)(t - \varepsilon_1)\dots(t - \varepsilon_{24})}{(t - \varepsilon_0)(t - \varepsilon_5)(t - \varepsilon_{10})(t - \varepsilon_{15})(t - \varepsilon_{20})} = \frac{t^{25} - 1}{t^5 - 1} =$$
$$= \frac{(t^5)^5 - 1}{t^5 - 1} = (t^5)^4 + (t^5)^3 + (t^5)^2 + t^5 + 1.$$

(Мы учли, что $\varepsilon_0, \varepsilon_5, \varepsilon_{10}, \varepsilon_{15}$ и ε_{20} для $n = 25$ совпадают с ε_0, ε_1, ε_2, ε_3 и ε_4 для $n = 5$.)

Впрочем, как мы сейчас увидим, похожим способом легко найти и многочлены $X_{p^k}(t)$.

з) Найдем $X_8(t)$. Как и в предыдущих случаях,

$$X_8(t) = (t - \varepsilon_1)(t - \varepsilon_3)(t - \varepsilon_5)(t - \varepsilon_7) = \frac{t^8 - 1}{(t - \varepsilon_0)(t - \varepsilon_2)(t - \varepsilon_4)(t - \varepsilon_6)} =$$
$$= \frac{t^8 - 1}{t^4 - 1} = t^4 + 1.$$

(Здесь $\frac{0}{8}, \frac{2}{8}, \frac{4}{8}$ и $\frac{6}{8}$ равны $\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ и $\frac{3}{4}$ соответственно.)

и) Многочлен $X_{34}(t)$ соответствует $n = 34 = 2 \cdot 17$ — произведению двух простых чисел. Поэтому не являются первообразными все корни ε_k, у которых k кратно 2 или 17. Многочлены, стоящие в знаменателе, можно разбить на две группы:

$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_2)(t-\varepsilon_4)\cdot\ldots\cdot(t-\varepsilon_{32})=t^{17}-1$$

и

$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{17})=t^2-1.$$

Заметим, что множитель $t-\varepsilon_0=t-1$ вошел в обе группы, то есть мы сосчитали его дважды. Поэтому нам придется добавить его в числитель. Таким образом,

$$\begin{aligned}X_{34}(t)&=\frac{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_1)\cdot\ldots\cdot(t-\varepsilon_{33})(t-\varepsilon_0)}{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_2)\cdot\ldots\cdot(t-\varepsilon_{32})(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{17})}=\\&=\frac{(t^{34}-1)(t-1)}{(t^{17}-1)(t^2-1)}=\frac{t^{17}+1}{t+1}=\\&=t^{16}-t^{15}+t^{14}-t^{13}+\ldots+t^2-t+1.\end{aligned}$$

к) Многочлен $X_{52}(t)$ соответствует показателю $n=52=2^2\cdot 13$. Корень ε_k не является первообразным тогда и только тогда, когда k делится на 2 или на 13. В знаменателе возникают две группы многочленов:

$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_2)(t-\varepsilon_4)\cdot\ldots\cdot(t-\varepsilon_{50})=t^{26}-1$$

и

$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{13})(t-\varepsilon_{26})(t-\varepsilon_{39})=t^4-1.$$

На сей раз мы дважды посчитали множители $t-\varepsilon_k$, у которых k делится и на 2, и на 13. Это $(t-\varepsilon_0)\cdot(t-\varepsilon_{26})=t^2-1$. Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}X_{52}(t)&=\frac{(t^{52}-1)(t^2-1)}{(t^{26}-1)(t^4-1)}=\frac{t^{26}+1}{t^2+1}=\\&=\frac{(t^2)^{13}+1}{t^2+1}=(t^2)^{12}-(t^2)^{11}+(t^2)^{10}-\ldots+(t^2)^2-t^2+1=\\&=t^{24}-t^{22}+t^{20}-\ldots+t^4-t^2+1.\end{aligned}$$

л) Многочлен $X_{130}(t)$ соответствует показателю $n=130=2\cdot 5\cdot 13$ — произведению трех простых чисел. Разбивая на группы множители, соответствующие непервообразным корням:

$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_2)\dots(t-\varepsilon_{128}) = t^{65}-1,$$
$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_5)\dots(t-\varepsilon_{125}) = t^{26}-1,$$
$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{13})\dots(t-\varepsilon_{117}) = t^{10}-1,$$

мы дважды сосчитаем многочлены $(t-\varepsilon_k)$, где k делится на какие-то два числа среди чисел 2, 5 и 13. Кроме того, $(t-\varepsilon_0)$ будет сосчитано трижды, так как 0 делится на все три простых делителя числа 130. Итак, в числитель придется добавить сомножители:

$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{10})(t-\varepsilon_{20})\dots(t-\varepsilon_{120}) = t^{13}-1,$$
$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{26})(t-\varepsilon_{52})\dots(t-\varepsilon_{104}) = t^{5}-1,$$
$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{65}) = t^{2}-1.$$

Но это означает, что в знаменателе надо будет поставить еще один множитель $t-\varepsilon_0 = t-1$, потому что теперь он и в числителе появляется трижды. Итак,

$$X_{130}(t) = \frac{(t^{130}-1)(t^{13}-1)(t^5-1)(t^2-1)}{(t^{65}-1)(t^{26}-1)(t^{10}-1)(t-1)} = \frac{(t^{65}+1)(t+1)}{(t^{13}+1)(t^5+1)} =$$
$$= \frac{t^{52}-t^{39}+t^{26}-t+1}{t^4-t^3+t^2-t+1}.$$

Деля найденные многочлены друг на друга, получаем $X_{130}(t)$.