В. В. Шуликовская

Руководство к решению задач по алгебре и геометрии

Ижевск

2016

УДК 512.64(07)
ББК 22.143р30

Шуликовская В. В.
Руководство к решению задач по алгебре и геометрии. (Издание второе, исправленное и дополненное). — Ижевск: ООО ИИЦ «Бон Анца», 2016. — 130 с.

Пособие включает в себя примеры решения типовых задач, возникающих при изучении высшей алгебры и аналитической геометрии, а также варианты индивидуальных заданий, которые можно использовать как при составлении контрольных работ, так и для самоподготовки.

Пособие адресовано бакалаврам направления «Фундаментальная информатика и информационные технологии», но может быть полезно студентам других математических и физических специальностей.

ISBN 978-5-905883-68-2 ББК 22.143р30

http://szulik.ru

Предисловие

Изначально данное пособие было написано с целью помочь студентам специальности «Прикладная математика и информатика» при выполнении домашней контрольной работы по курсу «Алгебра и геометрия», поэтому пособие делится на две основные части: примеры решения задач и варианты индивидуальных заданий. (В последних двух работах бóльшая часть заданий взята из сборника задач [3], который в настоящее время мало переиздается и постепенно становится библиографической редкостью.) В конце книги, как приложение, приведены некоторые теоретические сведения и формулы, по большей части касающиеся тех разделов, которые относительно редко освещаются в учебниках и справочниках по высшей математике.

При работе с пособием следует учесть, что оно охватывает не все виды задач, которые необходимо уметь решать студентам математических специальностей. Так, в пособии нет задач на определители низших порядков и на основные операции с матрицами (предполагается, что при выполнении работы по теме «Линейная алгебра» студент уже знаком с этими разделами алгебры, поэтому вычисление определителей или перемножение матриц, возникающее при решении задач, никак не комментируется). В работе по теме «Аналитическая геометрия» содержатся лишь наиболее простые и типичные примеры задач, особенно это касается тем «Уравнения прямой на плоскости» и «Уравнения прямой и плоскости в пространстве». Тем, кто желает научиться решать более сложные задания, следует обратиться к сборникам задач по аналитической геометрии.

Примеры решения задач

Работа 1. Комплексные числа

Задание 1. а) Представить в алгебраической форме i^{149} и $\frac{1}{i^{33}}$.

Решение. Как известно, $i^4 = 1$, поэтому преобразуем наше выражение следующим образом:

$$i^{149} = i^{148} \cdot i^1 = (i^4)^{37} \cdot i^1 = 1^{37} \cdot i = i.$$

Аналогично находим $\frac{1}{i^{33}}$:

$$\frac{1}{i^{33}} = i^{-33} = i^{-36} \cdot i^3 = (i^4)^{-9} \cdot i^3 = 1^{-9} \cdot i^3 = i^3 = -i.$$

б) Представить в алгебраической форме $\frac{(1+i)^2}{1-i}$. (Приложение 1.1)

Решение. Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{(1+i)^2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^3}{1^2 - i^2} = \frac{(1+i)^3}{1-(-1)} = \frac{(1+i)^3}{2}.$$

Найдем $(1+i)^3$. По формуле куба суммы получаем:

$$(1+i)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3.$$

Вспоминаем, что $i^2 = -1$, а $i^3 = -i$, отсюда

$$(1+i)^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i.$$

Окончательно

$$\frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{(1+i)^3}{2} = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i.$$

в) Представить в алгебраической форме $\left(\dfrac{\sqrt{2}e^{\pi i/6}\cdot i}{-1-i}\right)^{102}$.

(Приложение 1.3)

Решение. Преобразуем основание степени. Сначала заметим, что $i = e^{\pi i/2}$, так как $\operatorname{Arg} i = \dfrac{\pi}{2}$, $|i| = 1$ (см. рис. 1).

Найдем модуль и аргумент числа $z = -1 - i$. Здесь $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = -1$, поэтому

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Вектор, изображающий $-1 - i$, находится в третьей четверти, поэтому

$$\operatorname{Arg} z = \pi + \operatorname{arctg}\frac{-1}{-1} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

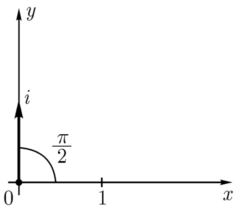

Рис. 1

Таким образом, $-1 - i = \sqrt{2}\cdot e^{5\pi i/4}$. Теперь мы можем записать основание степени в показательной форме:

$$\frac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi i}{6}}\cdot i}{-1-i} = \frac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi i}{6}}\cdot e^{\frac{\pi i}{2}}}{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{5\pi i}{4}}} = e^{\frac{\pi i}{6}+\frac{\pi i}{2}-\frac{5\pi i}{4}} = e^{\frac{-7\pi i}{12}}.$$

Воспользуемся формулой Муавра:

$$\left(e^{\frac{-7\pi i}{12}}\right)^{102} = e^{\frac{-7\cdot 102\pi i}{12}} = e^{\frac{-119\pi i}{2}}.$$

Зная, что $e^{2\pi i} = 1$, получаем

$$e^{\frac{-119\pi i}{2}} = e^{-\left(58\pi i + \frac{3\pi i}{2}\right)} = e^{-58\pi i}\cdot e^{-\frac{3\pi i}{2}} = e^{-\frac{3\pi i}{2}}.$$

Переходим к алгебраической форме записи:

$$e^{-\frac{3\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = 0 + i\cdot 1 = i.$$

Задание 2. Представить в тригонометрической форме и изобразить на плоскости. (Приложение 1.2)

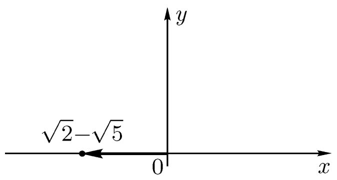

Рис. 2

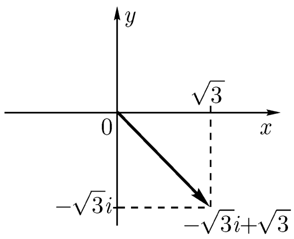

Рис. 3

а) $z = \sqrt{2} - \sqrt{5}$.

Это отрицательное действительное число, поэтому $\operatorname{Arg} z = \pi$, $|z| = |\sqrt{2} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ (см. рис. 2).

Его тригонометрическая форма:

$$\sqrt{2} - \sqrt{5} = (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\cos\pi + i\sin\pi).$$

б) $z = -\sqrt{3}i + \sqrt{3}$ (рис. 3).

Здесь $\operatorname{Re} z = \sqrt{3}$, $\operatorname{Im} z = -\sqrt{3}$. Поэтому

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}.$$

Вектор, изображающий $-\sqrt{3}i + \sqrt{3}$, находится в четвертой четверти, поэтому

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{4}.$$

Тригонометрическая форма:

$$-\sqrt{3}i + \sqrt{3} = \sqrt{6}\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big).$$

в) $z = -i^2\Big(i\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\Big)$.

Раскроем скобки:

$$z = -i^3\cos\frac{\pi}{12} + i^2\sin\frac{\pi}{12} =$$
$$= -(-i)\cos\frac{\pi}{12} + (-1)\sin\frac{\pi}{12} = -\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}.$$

$$|z| = \sqrt{\Big(-\sin\frac{\pi}{12}\Big)^2 + \Big(\cos\frac{\pi}{12}\Big)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Обозначим $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Тогда

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\sin\dfrac{\pi}{12}, \\ \sin\varphi = \cos\dfrac{\pi}{12}. \end{cases}$$

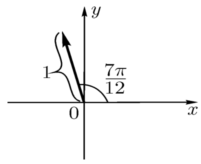

Рис. 4

По формулам приведения находим, что $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{7\pi}{12}$. Итак, $z = 1 \cdot \left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$ (см. рис. 4).

г) $\sqrt[4]{-\sqrt{3} - i}$.

Сначала запишем в тригонометрической форме число $z = -\sqrt{3} - i$. Здесь $\operatorname{Re} z = -\sqrt{3}$, $\operatorname{Im} z = -1$, поэтому

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Вектор, изображающий z, находится в третьей четверти, так что

$$\operatorname{Arg} z = \pi + \operatorname{arctg}\frac{-1}{-\sqrt{3}} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

Итак, $z = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$. Тогда

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos\frac{\frac{7\pi}{6} + 2\pi n}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{6} + 2\pi n}{4}\right), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Если $n = 0$, то получаем

$$\omega_1 = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos\frac{\frac{7\pi}{6} + 0}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{6} + 0}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{24} + i\sin\frac{7\pi}{24}\right).$$

Если $n = 1$, то получаем

$$\omega_2 = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos\frac{\frac{7\pi}{6} + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{6} + 2\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{24} + i\sin\frac{19\pi}{24}\right).$$

Если $n = 2$, то получаем

$$\omega_3 = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos\frac{\frac{7\pi}{6} + 4\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{6} + 4\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{24} + i\sin\frac{31\pi}{24}\right).$$

Если $n = 3$, то получаем

$$\omega_4 = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos\frac{\frac{7\pi}{6}+6\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{6}+6\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{43\pi}{24} + i\sin\frac{43\pi}{24}\right).$$

Для того чтобы изобразить $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ω_4 на плоскости, заметим, что аргументы ω_1 и ω_2, ω_2 и ω_3, ω_3 и ω_4 отличаются на $\frac{\pi}{2}$, то есть каждые два соседних вектора перпендикулярны. Длины этих векторов одинаковы и равны $\sqrt[4]{2}$, поэтому, соединяя их концы, получим квадрат с центром в начале координат (рис. 5).

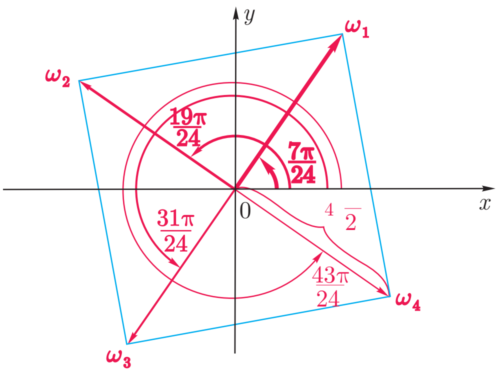

Рис. 5.

Задание 3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих данным неравенствам. (Приложение 1.2)

а) $|z + 2i| < |z - 2|$.

Сначала найдем множество точек, для которых $|z + 2i| = |z - 2|$, т. е. $|z - (-2i)| = |z - 2|$. Зная, что $|z - z_0|$ — это расстояние между точками z и z_0, видим, что уравнению $|z - (-2i)| = |z - 2|$ удовлетворяют точки, равноудаленные от точек $z_1 = -2i$ и $z_2 = 2$. Все такие точки лежат на серединном перпендикуляре отрезка, соединяющего z_1 и z_2 (рис. 6).

Серединный перпендикуляр разбивает комплексную плоскость на две полуплоскости, одна из которых и будет решением неравенства. Очевидно, точка $z_1 = -2i$ лежит в этой полуплоскости (рис. 7).

б) $0 < |5z - 2| \leqslant 2$.

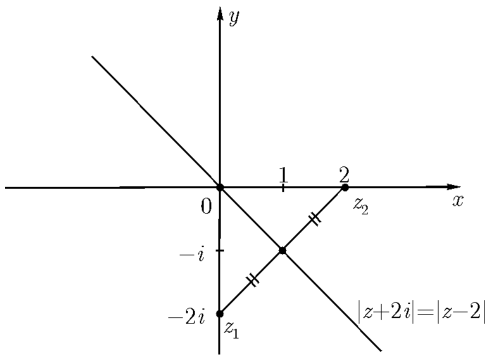

Рис. 6.

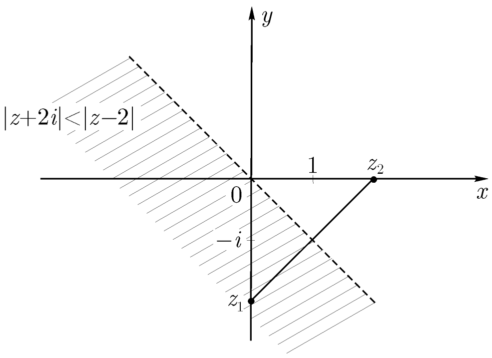

Рис. 7.

Преобразуем данные неравенства:

$$0 < \left| z - \frac{2}{5} \right| \leqslant \frac{2}{5}.$$

Это множество точек, расстояние от которых до точки $z_0 = \dfrac{2}{5}$ больше нуля, но меньше $\dfrac{2}{5}$. Получаем круг с центром в точке $z_0 = \dfrac{2}{5}$ и радиусом $\dfrac{2}{5}$, причем сама точка z_0 решением данной системы неравенств не является (рис. 8).

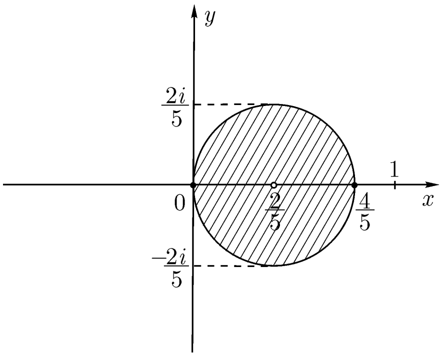

Рис. 8.

в) $|\operatorname{Re}\overline{z}| \geqslant 3$.

Пусть $z = x + iy$, тогда $\overline{z} = x - iy$, а $\operatorname{Re}\overline{z} = x$. Мы должны изобразить на плоскости множество точек, у которых $|x| \geqslant 3$, а y — произвольно (рис. 9).

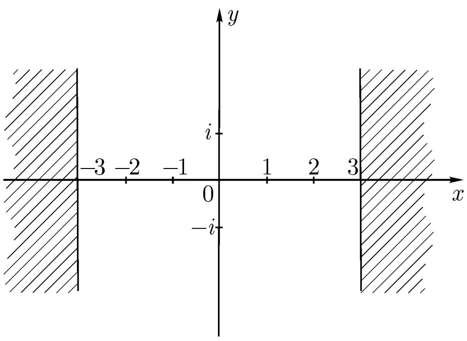

Рис. 9.

г) $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg(z + i - 1) \leqslant \frac{2\pi}{3}$.

Сначала изобразим множество точек, для которых $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{2\pi}{3}$ (рис. 10).

Осуществляя параллельный перенос на вектор $-(i-1) = 1-i$, получаем искомое множество (рис. 11).

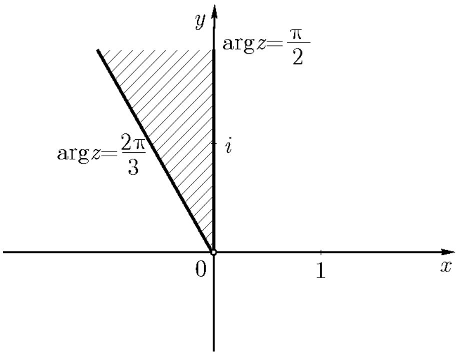

Рис. 10.

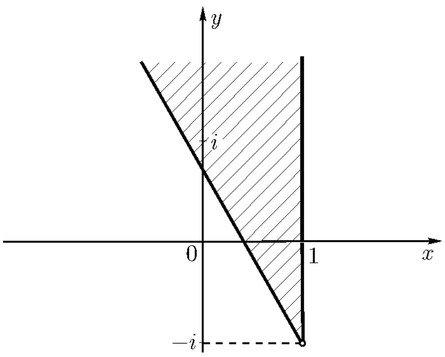

Рис. 11.

Задание 4.

а) Решить уравнение

$$32z^2 - 8z + 12 = 0.$$

Решение. Это квадратное уравнение. Найдем его дискриминант:

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 13 \cdot 32 = 64 - 1664 = -1600.$$

Тогда

$$z_{1,2} = \frac{8 + \sqrt{-1600}}{64} = \frac{8 + 40 \cdot \sqrt{-1}}{64} = \frac{8 \pm 40i}{64} = \frac{1}{8} \pm \frac{5i}{8}.$$

(Здесь $\sqrt{-1600}$ обозначает не арифметический квадратный корень, который всегда положителен, а комплексный корень, принимающий два значения. Поэтому знак $\pm$ ставить не обязательно.)

б) Решить уравнения $z + |z| = 6$ и $2\overline{z} = 3 + z$. (Приложение 1.4)

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда первое уравнение принимает вид

$$x + iy + \sqrt{x^2 + y^2} = 6.$$

Комплексные числа совпадают, если совпадают их действительные и мнимые части. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + y^2} = 6, \\ y = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} y = 0, \\ x + |x| = 6. \end{cases}$$

Решая последнее уравнение, находим $x = 3$.

Ответ: $z = 3$.

Теперь решим уравнение $2\overline{z} = 3 + z$:

$$2(x - iy) = 3 + x + iy.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} 2x = 3 + x, \\ -2y = y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3, \\ y = 0. \end{cases}$$

Ответ: $z = 3$.

Задание 5. Записать круговые многочлены

$$X_1(t),\ X_2(t),\ X_3(t),\ X_5(t),\ X_7(t),\ X_4(t),$$
$$X_{25}(t),\ X_8(t),\ X_{34}(t),\ X_{52}(t),\ X_{130}(t).$$

(В последнем случае представить ответ как частное двух многочленов. Приложение 1.5)

Решение.

а) Здесь $n = 1$. Единственный имеющийся корень

$$\varepsilon_0 = \cos\left(\frac{2\pi \cdot 0}{1}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi \cdot 0}{1}\right) = 1$$

является первообразным. По определению кругового многочлена

$$X_1(t) = t - \varepsilon_0 = t - 1.$$

б) В случае $n = 2$ существуют два корня из единицы: $\varepsilon_0 = 1$ и $\varepsilon_1 = -1$. Первообразным будет только ε_1, так как $\varepsilon_0 = 1$ уже появлялось в предыдущий раз. Таким образом,

$$X_2(t) = t - \varepsilon_1 = t + 1.$$

в) При $n = 3$ имеются три корня из единицы:

$$\varepsilon_0 = 1,$$
$$\varepsilon_1 = \cos\Big(\frac{2\pi \cdot 1}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{2\pi \cdot 1}{3}\Big) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$\varepsilon_2 = \cos\Big(\frac{2\pi \cdot 2}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{2\pi \cdot 2}{3}\Big) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

среди которых два первообразных: ε_1 и ε_2 (дроби $1/3$ и $2/3$ несократимы). На сей раз проще представить круговой многочлен в виде

$$X_3(t) = \frac{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_1)(t-\varepsilon_2)}{t-\varepsilon_0} = \frac{t^3-1}{t-1} = t^2 + t + 1.$$

Мы использовали тот факт, что произведение всех сомножителей вида $(t - \varepsilon_k)$, где $\varepsilon_k^n = 1$, должно давать нам $t^n - 1$:

$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_1)\cdot\ldots\cdot(t-\varepsilon_{n-2})(t-\varepsilon_{n-1}) = t^n - 1,$$

потому что $\varepsilon_k, k = 0\ldots n-1$ — это все корни уравнения $t^n - 1 = 0$. С помощью этого правила легко находить круговые многочлены $X_p(t)$, где p — простое число.

г) Найдем $X_5(t)$. Число $n = 5$ — простое, поэтому среди корней ε_0, ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 первообразными будут все, кроме ε_0 (все дроби 1/5, 2/5, 3/5 и 4/5 несократимы). Таким образом,

$$X_5(t) = \frac{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_1)(t-\varepsilon_2)(t-\varepsilon_3)(t-\varepsilon_4)}{t-\varepsilon_0} = \frac{t^5-1}{t-1} = t^4+t^3+t^2+t+1.$$

д) Аналогичным образом находим $X_7(t)$:

$$X_7(t) = \frac{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_1)\cdot\ \ldots\ \cdot(t-\varepsilon_6)}{t-\varepsilon_0} = \frac{t^7-1}{t-1} = t^6+t^5+t^4+t^4+t^3+t^2+t+1.$$

е) Теперь найдем $X_4(t)$. На сей раз среди корней $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ только два первообразных: ε_1 и ε_2, поэтому

$$X_4(t) = \frac{t^4-1}{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_2)}.$$

Вместе с тем корни ε_0 и ε_2, соответствующие показателю степени $n = 4$, совпадают с корнями ε_0 и ε_1 для показателя $n = 2$ $\left(\frac{0}{4} = \frac{0}{2},\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\right)$, следовательно,

$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_2) = t^2 - 1$$

и

$$X_4(t) = \frac{t^4-1}{t^2-1} = t^2+1.$$

ж) Точно так же можно находить любые многочлены вида $X_{p^2}(t)$, где p — простое число.

$$X_{25} = \frac{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_1)\ldots(t-\varepsilon_{24})}{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_5)(t-\varepsilon_{10})(t-\varepsilon_{15})(t-\varepsilon_{20})} = \frac{t^{25}-1}{t^5-1} =$$
$$= \frac{(t^5)^5-1}{t^5-1} = (t^5)^4 + (t^5)^3 + (t^5)^2 + t^5 + 1.$$

(Мы учли, что $\varepsilon_0, \varepsilon_5, \varepsilon_{10}, \varepsilon_{15}$ и ε_{20} для $n = 25$ совпадают с ε_0, ε_1, ε_2, ε_3 и ε_4 для $n = 5$.)

Впрочем, как мы сейчас увидим, похожим способом легко найти и многочлены $X_{p^k}(t)$.

з) Найдем $X_8(t)$. Как и в предыдущих случаях,

$$X_8(t) = (t-\varepsilon_1)(t-\varepsilon_3)(t-\varepsilon_5)(t-\varepsilon_7) = \frac{t^8-1}{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_2)(t-\varepsilon_4)(t-\varepsilon_6)} = \\ = \frac{t^8-1}{t^4-1} = t^4+1.$$

(Здесь $\frac{0}{8}, \frac{2}{8}, \frac{4}{8}$ и $\frac{6}{8}$ равны $\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ и $\frac{3}{4}$ соответственно.)

и) Многочлен $X_{34}(t)$ соответствует $n = 34 = 2\cdot 17$ — произведению двух простых чисел. Поэтому не являются первообразными все корни ε_k, у которых k кратно 2 или 17. Многочлены, стоящие в знаменателе, можно разбить на две группы:

$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_2)(t-\varepsilon_4)\cdot\ldots\cdot(t-\varepsilon_{32}) = t^{17}-1$$

и

$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{17}) = t^2-1.$$

Заметим, что множитель $t-\varepsilon_0 = t-1$ вошел в обе группы, то есть мы сосчитали его дважды. Поэтому нам придется добавить его в числитель. Таким образом,

$$X_{34}(t) = \frac{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_1)\cdot\ldots\cdot(t-\varepsilon_{33})(t-\varepsilon_0)}{(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_2)\cdot\ldots\cdot(t-\varepsilon_{32})(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{17})} = \\ = \frac{(t^{34}-1)(t-1)}{(t^{17}-1)(t^2-1)} = \frac{t^{17}+1}{t+1} = \\ = t^{16}-t^{15}+t^{14}-t^{13}+\ldots+t^2-t+1.$$

к) Многочлен $X_{52}(t)$ соответствует показателю $n = 52 = 2^2\cdot 13$. Корень ε_k не является первообразным тогда и только тогда, когда k делится на 2 или на 13. В знаменателе возникают две группы многочленов:

$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_2)(t-\varepsilon_4)\cdot\ldots\cdot(t-\varepsilon_{50}) = t^{26}-1$$

и

$$(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{13})(t-\varepsilon_{26})(t-\varepsilon_{39}) = t^4-1.$$

На сей раз мы дважды посчитали множители $t-\varepsilon_k$, у которых k делится и на 2, и на 13. Это $(t-\varepsilon_0)\cdot(t-\varepsilon_{26}) = t^2-1$. Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
X_{52}(t) &= \frac{(t^{52}-1)(t^2-1)}{(t^{26}-1)(t^4-1)} = \frac{t^{26}+1}{t^2+1} = \\
&= \frac{(t^2)^{13}+1}{t^2+1} = (t^2)^{12} - (t^2)^{11} + (t^2)^{10} - \ldots + (t^2)^2 - t^2 + 1 = \\
&= t^{24} - t^{22} + t^{20} - \ldots + t^4 - t^2 + 1.
\end{aligned}$$

л) Многочлен $X_{130}(t)$ соответствует показателю $n = 130 = 2\cdot 5\cdot 13$ — произведению трех простых чисел. Разбивая на группы множители, соответствующие непервообразным корням:

$$\begin{aligned}
(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_2)\ldots(t-\varepsilon_{128}) &= t^{65}-1,\\
(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_5)\ldots(t-\varepsilon_{125}) &= t^{26}-1,\\
(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{13})\ldots(t-\varepsilon_{117}) &= t^{10}-1,
\end{aligned}$$

мы дважды сосчитаем многочлены $(t-\varepsilon_k)$, где k делится на какие-то два числа среди чисел 2, 5 и 13. Кроме того, $(t-\varepsilon_0)$ будет сосчитано трижды, так как 0 делится на все три простых делителя числа 130. Итак, в числитель придется добавить сомножители:

$$\begin{gathered}
(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{10})(t-\varepsilon_{20})\ldots(t-\varepsilon_{120}) = t^{13}-1,\\
(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{26})(t-\varepsilon_{52})\ldots(t-\varepsilon_{104}) = t^5-1,\\
(t-\varepsilon_0)(t-\varepsilon_{65}) = t^2-1.
\end{gathered}$$

Но это означает, что в знаменателе надо будет поставить еще один множитель $t-\varepsilon_0 = t-1$, потому что теперь он и в числителе появляется трижды. Итак,

$$\begin{aligned}
X_{130}(t) &= \frac{(t^{130}-1)(t^{13}-1)(t^5-1)(t^2-1)}{(t^{65}-1)(t^{26}-1)(t^{10}-1)(t-1)} = \frac{(t^{65}+1)(t+1)}{(t^{13}+1)(t^5+1)} = \\
&= \frac{t^{52}-t^{39}+t^{26}-t+1}{t^4-t^3+t^2-t+1}.
\end{aligned}$$

Деля найденные многочлены друг на друга, получаем $X_{130}(t)$.

Работа 2. Целые числа

Задание 1. Разложить число $n = 154350$ на простые множители. (Приложение 2.2)

Решение. Первое простое положительное число — это $p_1 = 2$. Наше число n делится на 2 (так как его последняя цифра 0 делится на 2). Рассмотрим частное $n_1 = \frac{n}{2} = 77175$. Это число на 2 уже не делится (его последняя цифра 5 не делится на 2), поэтому рассмотрим следующее простое число $p_2 = 3$. Число n_1 делится на 3, так как сумма его цифр $7+7+1+7+5 = 27$ делится на 3. Находим $n_2 = \frac{n_1}{3} = 25725$. Это число можно еще раз поделить на 3: $n_3 = \frac{n_2}{3} = 8575$. Сумма цифр числа n_3 равна $8+5+7+5 = 25$ и не делится на 3, поэтому рассмотрим следующее по счету простое число $p_3 = 5$. Последняя цифра числа n_3 делится на 5, так что и само это число делится на 5. Получаем $n_4 = \frac{n_3}{5} = 1715$. Это число можно еще раз поделить на 5: $n_5 = \frac{n_4}{5} = 343$. Поскольку 343 на 5 не делится, берем следующее простое число $p_4 = 7$. Легко проверить, что n_5 делится на 7: $n_6 = \frac{n_5}{7} = 49$. Новое число можно еще раз поделить на 7: $n_7 = \frac{n_6}{7} = 7$. Наконец, $n_8 = \frac{n_7}{7} = 1$. Вкратце результаты наших вычислений можно записать так:

$$\begin{array}{r|l} 154350 & 2 \\ 77175 & 3 \\ 25725 & 3 \\ 8575 & 5 \\ 1715 & 5 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Отсюда $154350 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3$ — искомое разложение на простые множители.

Задание 2.

а) Найти наибольший общий делитель чисел 2786 и 138 с помощью алгоритма Евклида. Записать линейное представление числа $d = \text{НОД}(2786, 138)$ в виде $d = 2786 \cdot u + 138 \cdot v$, где $u, v \in \mathbb{Z}$. (Приложение 2.1) б) Решить диофантово уравнение (Приложение 2.6):

$$2786x + 138y = 4.$$

Решение.

а) Производим серию делений с остатком в соответствии с алгоритмом Евклида:

$$\begin{aligned}\underline{2786} &= \underline{138} \cdot 20 + \underline{26},\\ \underline{138} &= \underline{26} \cdot 5 + \underline{8},\\ \underline{26} &= \underline{8} \cdot 3 + \underline{2},\\ \underline{8} &= \underline{2} \cdot 4.\end{aligned}$$

(Мы отмечаем чертой внизу те числа, которые должны будут участвовать в дальнейших делениях.) Как видим, последний отличный от нуля остаток — это число 2, и НОД$(2786, 138) = 2$. Запишем его линейное представление. Из предпоследнего равенства следует, что $\underline{2} = \underline{26} - \underline{8} \cdot 3$, а из предыдущего равенства следует, что $\underline{8} = \underline{138} - \underline{26} \cdot 5$. Поэтому

$$\underline{2} = \underline{26} - \underline{8} \cdot 3 = \underline{26} - (\underline{138} - \underline{26} \cdot 5) \cdot 3 = \underline{26} \cdot 16 - \underline{138} \cdot 3.$$

Заметим, что при приведении подобных мы умножали и складывали только неподчеркнутые числа, а с подчеркнутыми обращались как с переменными. Теперь остается учесть, что

$$\underline{26} = \underline{2786} - \underline{138} \cdot 20$$

и

$$\underline{2} = \underline{26} \cdot 16 - \underline{138} \cdot 3 = (\underline{2786} - \underline{138} \cdot 20) \cdot 16 - \underline{138} \cdot 3 = \underline{2786} \cdot 16 - \underline{138} \cdot 323.$$

Итак,

$$2 = 2786 \cdot 16 + 138 \cdot (-323)$$

— искомое линейное представление.

б) Поскольку НОД$(2786, 138) = 2$ и правая часть уравнения делится на 2, мы можем перейти к эквивалентному уравнению

$$1393x + 69y = 2,$$

в котором числа 1393 и 69 уже взаимно просты. Чтобы записать какое-то частное решение этого уравнения, рассмотрим найденное в предыдущем пункте линейное представление для НОД$(2786, 138) = 2$ и превратим его в линейное представление для НОД$(1393, 69) = 1$:

$$1 = 1393 \cdot 16 + 69 \cdot (-323).$$

Тогда

$$2 = 1393 \cdot 32 + 69 \cdot (-646)$$

и пара чисел $x_0 = 32$, $y_0 = -646$ дает нам одно из решений нашего уравнения. Как известно, общее решение уравнения с взаимно простыми a и b можно записать в виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Итак, получаем

$$\begin{cases} x = 32 + 69t \\ y = -646 - 1393t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Придавая t различные целые значения, находим пары чисел $(32, -646)$, $(101, -2039)$, $(-37, 747)$ и т. д. Все они будут решениями нашего уравнения.

Задание 3. Составить таблицу значений многочлена

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 2$$

в поле $\mathbb{Z}_7$. Указать корни этого многочлена в $\mathbb{Z}_7$. (Приложение 2.4)

Решение. Поле $\mathbb{Z}_7$ содержит семь элементов: $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$ и $\overline{6}$. Найдем значения многочлена $f(x)$ на каждом из этих элементов, понимая коэффициенты многочлена как соответствующие классы вычетов. Напомним, что операции сложения и умножения с классами вычетов производятся так же, как с обычными числами, но мы всегда можем заменить число на его остаток от деления на 7 или еще на какое-нибудь число, сравнимое с исходным по модулю 7. Например,

$$\begin{aligned} f(\overline{6}) = \overline{2} \cdot \overline{6}^3 + \overline{3} \cdot \overline{6}^2 + \overline{5} \cdot \overline{6} + \overline{2} = \overline{2} \cdot (\overline{-1})^3 + \overline{3} \cdot (\overline{-1})^2 + \overline{5} \cdot (\overline{-1}) + \overline{2} = \\ = -\overline{2} + \overline{3} - \overline{5} + \overline{2} = \overline{-2} = \overline{5}. \end{aligned}$$

Здесь мы заменили число 6 на сравнимое с ним число $-1 = 6 - 7$, что существенно упростило вычисления.

Аналогично находим:

$$f(\overline{0})=\overline{2}\cdot\overline{0}^3+\overline{3}\cdot\overline{0}^2+\overline{5}\cdot\overline{0}+\overline{2}=\overline{2},$$

$$f(\overline{1})=\overline{2}\cdot\overline{1}^3+\overline{3}\cdot\overline{1}^2+\overline{5}\cdot\overline{1}+\overline{2}=\overline{2}+\overline{3}+\overline{5}+\overline{2}=\overline{12}=\overline{5},$$

$$f(\overline{2})=\overline{2}\cdot\overline{2}^3+\overline{3}\cdot\overline{2}^2+\overline{5}\cdot\overline{2}+\overline{2}=\overline{2}\cdot\overline{1}+\overline{3}\cdot\overline{4}+\overline{10}+\overline{2}=\overline{2}+\overline{5}+\overline{3}+\overline{2}=\overline{5},$$

$$f(\overline{3})=\overline{2}\cdot\overline{3}^3+\overline{3}\cdot\overline{3}^2+\overline{5}\cdot\overline{3}+\overline{2}=\overline{2}\cdot(\overline{-1})+\overline{3}\cdot\overline{2}+\overline{1}+\overline{2}=-\,\overline{2}-\overline{1}+\overline{1}+\overline{2}=\overline{0},$$

$$f(\overline{4})=\overline{2}\cdot\overline{4}^3+\overline{3}\cdot\overline{4}^2+\overline{5}\cdot\overline{4}+\overline{2}=\overline{2}\cdot\overline{1}+\overline{3}\cdot\overline{2}-\overline{1}+\overline{2}=\overline{2}-\overline{1}-\overline{1}+\overline{2}=\overline{2},$$

$$f(\overline{5})=\overline{2}\cdot\overline{5}^3+\overline{3}\cdot\overline{5}^2+\overline{5}\cdot\overline{5}+\overline{2}=\overline{2}\cdot(\overline{-2})^3+\overline{3}\cdot(\overline{-2})^2+\overline{4}+\overline{2}=$$
$$=\overline{2}\cdot(\overline{-1})+\overline{3}\cdot\overline{4}-\overline{1}=-\,\overline{2}+\overline{5}-\overline{1}=\overline{2}.$$

Итак, таблица значений многочлена имеет вид

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$f(x)$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$

В $\mathbb{Z}_7$ у данного многочлена есть единственный корень $x=\overline{3}$.

Задание 4. Решить сравнение. Ответ представить как множество классов вычетов в соответствующем $\mathbb{Z}_m$. Записать десять любых целых чисел, служащих решениями данного сравнения. (Приложение 2.5)

$$21x \equiv 126 \pmod{56}.$$

Решение. Упростим данное сравнение, заменив число 126 на его остаток от деления на 56:

$$21x \equiv 14 \pmod{56}.$$

Находим НОД$(21, 56) = 7$. В нашем случае правая часть сравнения равна 14 и делится на 7, поэтому данное сравнение имеет 7 решений в поле $\mathbb{Z}_{56}$.

Разделив числа 21, 14 и 56 на 7, перейдем к вспомогательному сравнению

$$3x \equiv 2 \pmod{8},$$

которое имеет единственное решение в $\mathbb{Z}_8$, потому что НОД$(3, 8) = 1$. Перебирая значения $x = 0, 1, 2$ и т. д., находим, что

$$3\cdot 6 = 18 \equiv 2 \pmod{8},$$

то есть искомое единственное решение — класс вычетов $x = \overline{6}$. Добавляя к числу 6 числа, кратные 8, получаем ответы в $\mathbb{Z}_{56}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \overline{6}, \\ x_2 &= \overline{14}, \\ x_3 &= \overline{22}, \\ x_4 &= \overline{30}, \\ x_5 &= \overline{38}, \\ x_6 &= \overline{46}, \\ x_7 &= \overline{54}. \end{aligned}$$

(Заметим, что в $\mathbb{Z}_8$ этим числам соответствует один и тот же класс вычетов, а в $\mathbb{Z}_{56}$ — разные.) Итак, у нас есть 7 ответов в $\mathbb{Z}_{56}$. Им соответствуют такие целые числа, как 6, 14, 22, 30, 38, 46, 54, $-50 = 6 - 56$, $-42 = 14 - 56$, $62 = 6 + 56$ и т. д.

Работа 3. Многочлены

Задание 1. Используя определение кратного корня, перечислить все корни многочлена $f(x)$ и указать их кратность. (Приложение 3.2)

$$f(x) = x^2 \cdot (x-2)^3(x+1)^4(x-1).$$

Решение. По определению, число c является корнем кратности k многочлена $f(x)$, если

$$f(x) = (x-c)^k \cdot g(x),$$

где $g(c) \neq 0$. Иначе говоря, многочлен $f(x)$ содержит в своем разложении на множители скобку $(x-c)^k$.

Пусть $c = 0$. Тогда

$$f(x) = (x-0)^2 \cdot g(x),$$

где $g(x) = (x-2)^3(x+1)^4(x-1)$, причем $g(0) = 8 \neq 0$. Это означает, что $c = 0$ — корень кратности 2.

Рассмотрим $c = 2$. Тогда

$$f(x) = (x-2)^3 \cdot g_1(x),$$

где $g_1(x) = x^2(x+1)^4(x-1)$ и $g_1(2) = 4 \cdot 3^4 \cdot 1 \neq 0$. Таким образом, число $c = 2$ — это корень кратности 3. Аналогично находим, что число -1 — это корень кратности 4, а число 1 — простой корень (кратности 1).

Итак, у многочлена $f(x)$ есть четыре корня: $x_1 = 0$ кратности 2, $x_2 = 2$ кратности 3, $x_3 = -1$ кратности 4 и $x_4 = 1$ кратности 1.

Задание 2. Найти кратность корня $x_0 = -i$ в уравнении $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$. (Приложение 3.2)

Решение. Если $x_0 = -i$ — корень данного уравнения, то сопряженное ему число i тоже является корнем этого уравнения. Тогда многочлен $x^4 + 2x^2 + 1$ без остатка делится на многочлен

$$(x-(-i))(x-i) = (x+i)(x-i) = x^2 - i^2 = x^2 + 1.$$

Разделим $x^4 + 2x^2 + 1$ на $x^2 + 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^2+1 & x^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^4+\ \ x^2} & x^2+1 \\ x^2+1 & \\ \underline{x^2+1} & \\ 0 & \end{array}$$

Частное $x^2 + 1$, очевидно, тоже делится на $x^2 + 1$, так что $x_0 = -i$ — корень второй кратности.

Задание 3. Разложить на линейные множители многочлен $2x^4 + 3x^2 + 1$. (Приложение3.3)

Решение. Найдем корни этого многочлена.

$$2x^4 + 3x^2 + 1 = 0.$$

Сделаем замену $y = x^2$:

$$2y^2 + 3y + 1 = 0,$$
$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1,$$
$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{4}, \quad y_1 = -1, \qquad y_2 = -\frac{1}{2},$$

поэтому либо $x^2 = 1$ и $x_{1,2} = \pm i$, либо $x^2 = -\frac{1}{2}$ и $x_{3,4} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$.

Теперь раскладываем данный многочлен на множители:

$$2x^2 + 3x^2 + 1 = 2(x-i)(x+i)\left(x - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{i}{\sqrt{2}}\right).$$

Задание 4. Построить многочлен с вещественными коэффициентами по данным корням $x_1 = i + 4$, $x_2 = -3 + i$ (двукратный).

(Приложение3.3)

Решение. Поскольку коэффициенты искомого многочлена по условию задачи вещественны, его корнями будут также числа, комплексно сопряженные данным:

$$x_3 = -i + 4, \qquad x_4 = -3 - i \quad \text{(двукратный)}.$$

Наш многочлен имеет вид

$$(x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3)(x - x_4)^2.$$

Перемножим многочлены, соответствующие сопряженным корням:

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_3) &= (x - 4 - i)(x - 4 + i) = (x - 4)^2 - i^2 = \\ &= (x - 4)^2 + 1 = x^2 - 8x + 17, \\ (x - x_2)(x - x_4) &= (x + 3 - i)(x + 3 + i) = (x + 3)^2 - i^2 = \\ &= (x + 3)^2 + 1 = x^2 + 6x + 10.\end{aligned}$$

Искомый многочлен имеет вид

$$(x^2 - 8x + 17)(x^2 + 6x + 10)^2.$$

Задание 5. Выяснить, приводим ли данный многочлен над полем $\mathbb{C}$ и над полем $\mathbb{R}$. (Приложение 3.4)

Решение.

а) $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Поскольку любой многочлен можно разложить на множители первой степени с комплексными коэффициентами, а степень $\deg f(x) = 2 > 1$, данный многочлен приводим над $\mathbb{C}$. Посмотрим, можно ли разложить его на множители с действительными коэффициентами. Найдем корни $f(x)$:

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$
$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 3}, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

Итак, $f(x) = (x-x_1)(x-x_2) = (x+1)(x-3)$ и многочлен $f(x)$ приводим над $\mathbb{R}$.

б) $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Как и в предыдущий раз, $\deg f(x) = 2 > 1$, поэтому $f(x)$ приводим над $\mathbb{C}$. Найдем корни $f(x)$:

$$x^2 - 4x + 5 = 0,$$
$$x_{1,2} = 2 + \sqrt{4-5} = 2 \pm i.$$

Как видим, корни многочлена $f(x)$ комплексные, поэтому его нельзя разложить на линейные множители с действительными коэффициентами. Итак, $f(x)$ неприводим над полем $\mathbb{R}$.

Задание 6. Используя критерий Эйзенштейна, выяснить, приводим ли данный многочлен над полем $\mathbb{Q}$. (Приложение 3.4)

$$f(x) = 2x^6 - 121x^5 + 55x^3 - 22x + 44.$$

Решение. Замечаем, что все коэффициенты многочлена $f(x)$, кроме старшего, делятся на простое число 11. Поэтому, применяя критерий Эйзенштейна, возьмем $p = 11$. В нашем случае

1) $a_0 = 2$ не делится на p;

2) $a_1 = -121$, $a_2 = 0$, $a_3 = 55$, $a_4 = 0$, $a_5 = -22$ и $a_6 = 44$ делятся на p;

3) $a_6 = 44$ не делится на p^2.

Следовательно, данный многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$.

Задание 7. С помощью теоремы Штурма отделить корни данного многочлена (Приложение 3.6):

$$f(x) = x^3 - 7x + 7.$$

Решение. Полагаем в системе Штурма

$$f_0(x) = x^3 - 7x + 7,$$
$$f_1(x) = f_0'(x) = 3x^2 - 7.$$

Как и при отыскании НОД многочленов, мы можем умножать и делить элементы системы Штурма на константы, только на сей раз надо ограничиться положительными константами, потому что нас интересуют знаки многочленов $f_i(x)$. Умножив $f_0(x)$ на положительную константу 3, выполняем деление с остатком:

$$\begin{array}{r|l}
3x^3 - 21x + 21 & 3x^2 - 7 \\ \cline{2-2}
3x^3 - 7x \phantom{{}+21} & x \\ \hline
-14x + 21 &
\end{array}$$

Разделим остаток на положительную константу 7 и изменим его знак на противоположный:

$$f_2(x) = -\frac{1}{7}(-14x + 21) = 2x - 3.$$

Теперь умножим $f_1(x)$ на положительную константу 2 и разделим на $f_2(x)$:

$$\begin{array}{l|l}
6x^2 - 14 & 2x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^2 - 9x} & 3x + 9/2 \\
\qquad 9x - 14 & \\
\qquad \underline{9x - 27/2} & \\
\qquad\quad -1/2 &
\end{array}$$

Изменяя знак остатка, видим, что в качестве $f_3(x)$ можно взять любую положительную константу. Будем считать, что $f_3(x) = 1$. В частности, это означает, что НОД$(f_0(x), f_1(x)) = 1$, то есть у многочлена $f(x) = f_0(x)$ нет кратных корней (в противном случае нам пришлось бы разделить все найденные многочлены на НОД$(f_0(x), f_1(x))$). Итак, система Штурма для данного многочлена имеет вид:

$$\begin{aligned}
&f_0(x) = x^3 - 7x + 7,\\
&f_1(x) = 3x^2 - 7,\\
&f_2(x) = 2x - 3,\\
&f_3(x) = 1.
\end{aligned}$$

Обозначая $W(x)$ число перемен знака в системе Штурма, составляем следующую таблицу.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$W(x)$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	1	3
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1	0
0	7	-7	-3	1	2
-1	13	-4	-5	1	2
-2	13	5	-13	1	2
-3	1	20	-9	1	2
-4	-29	41	-11	1	3
1	1	-4	-1	1	2
2	1	5	1	1	0
$3/2$	$-1/8$	$-1/4$	0	1	1

Заполнив первые две строчки, мы можем сделать вывод, что данный многочлен имеет $W(-\infty) - W(+\infty) = 3 - 0 = 3$ действительных корня. Поскольку $W(0) = 2$, у $f(x)$ есть 2 положительных корня ($W(0) - W(+\infty) = 2$) и один отрицательный ($W(-\infty) - W(0) = 1$). Перебирая целые отрицательные значения x, выясняем, что отрицательный корень лежит на отрезке $[-4; -3]$. Два положительных корня лежат на отрезке $[1; 2]$. Чтобы отделить их, разбиваем этот отрезок пополам и находим $W(3/2)$. Итак, у многочлена $f(x)$ есть три действительных корня, лежащих на отрезках $[-4; -3]$, $[1; 3/2]$ и $[3/2; 2]$.

Задание 8. Найти наибольший общий делитель многочленов $2x^4 - x^3 - 2x + 1$ и $3x^3 - 2x^2 - 2x - 5$. (Приложение3.1)

Решение. Наибольший общий делитель многочленов определен с точностью до константы, поэтому мы можем умножать данные многочлены на произвольные константы. Умножим первый из многочленов на 3, а второй — на 2 и разделим больший из них на меньший.

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4 - 3x^3 - 6x + 3 & 6x^3 - 4x^2 - 4x - 10 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 10x} & x + 1/6 \\
\quad x^3 + 4x^2 + 4x + 3 & \\
\quad \underline{x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}} & \\
\quad \frac{14}{3}x^2 + \frac{14}{3}x + \frac{14}{3} &
\end{array}
$$

Умножим найденный остаток на $\dfrac{3}{14}$ и разделим многочлен $3x^3 - 2x^2 - 2x - 5$ на этот остаток (мы вновь сократили все коэффициенты многочленов на 2).

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 - 2x^2 - 2x - 5 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3 + 3x^2 + 3x \quad} & 3x - 5 \\
-5x^2 - 5x - 5 & \\
\underline{-5x^2 - 5x - 5} & \\
0 &
\end{array}
$$

Итак, $3x^3 - 2x^2 - 2x - 5$ делится на $x^2 + x + 1$, следовательно, $x^2 + x + 1$ — последний ненулевой остаток — и есть наибольший общий делитель двух исходных многочленов.

Работа 4. Алгебраические структуры

Задание 1. Выяснить, является ли данное множество полугруппой, моноидом, группой относительно данной бинарной операции.

Решение.

а) Множество всех чисел, дающих при делении на 6 в остатке 1, относительно сложения и умножения.

Наше множество (обозначим его через X) состоит из чисел вида $6n+1$, где $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим сумму двух таких чисел:

$$x_1 + x_2 = 6n_1 + 1 + 6n_2 + 1 = 6(n_1 + n_2) + 2.$$

Нам не удастся представить это число в виде $6n + 1$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, сложение даже не является бинарной операцией на данном множестве: выполняя эту операцию, мы выходим за пределы множества X. Поэтому оно не будет ни полугруппой, ни моноидом, ни группой относительно сложения.

Теперь рассмотрим произведение двух чисел из множества X:

$$x_1 \cdot x_2 = (6n_1 + 1)(6n_2 + 1) = 36n_1n_2 + 6n_1 + 6n_2 + 1 = 6n + 1,$$

где $n = 6n_1n_2 + n_1 + n_2 \in \mathbb{Z}$. Итак, перемножая два числа из данного множества, мы получаем число из этого же множества, и умножение является бинарной операцией на X. Эта операция ассоциативна:

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3),$$

так как умножение чисел ассоциативно. Следовательно, множество X — полугруппа. Нейтральным элементом относительно умножения служит число 1:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

Поскольку $1 = 6 \cdot 0 + 1$, это число принадлежит данному множеству, следовательно, X — моноид. Вместе с тем легко понять, что множество X не является группой. Например, элемент, обратный числу $x = 6 \cdot 1 + 1 = 7$, — это число $1/7$, которое не является целым и не представляется в виде $6 \cdot n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Итак, данное множество представляет собой моноид относительно умножения.

б) Множество комплексных чисел вида $a+bi$, где $a, b \in \mathbb{Z}$ (гауссовы целые числа), относительно сложения.

Складывая два гауссовых числа

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i),$$

мы получаем число

$$z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

где числа $a_1 + a_2$ и $b_1 + b_2$ — целые. Итак, сумма двух гауссовых чисел — тоже гауссово число. Кроме того, операция сложения, очевидно, ассоциативна, так как этим свойством обладает любая сумма чисел. Поэтому наше множество — полугруппа.

Нейтральным элементом служит число $0 + 0 \cdot i$, принадлежащее данному множеству. Следовательно, это моноид. Наконец, каждому числу $a + bi$ соответствует противоположное (обратное относительно сложения) число

$$-a + (-b)i,$$

также входящее в данное множество, потому что числа $-a$ и $-b$ — тоже целые. Таким образом, данное множество является группой относительно сложения.

в) Множество целых чисел относительно операции

$$a * b = 3a - 2b.$$

Выполняя данную операцию с целыми числами a и b, мы получим целое число $3a - 2b$, то есть $*$ — это бинарная операция на множестве $\mathbb{Z}$. В то же время она не ассоциативна:

$$(a * b) * c = (3a - 2b) * c = 3(3a - 2b) - 2c = 9a - 6b - 2c,$$

но

$$a * (b * c) = 3a - 2(b * c) = 3a - 2(3b - 2c) = 3a - 6b + 4c.$$

Таким образом, $(\mathbb{Z}, *)$ — не полугруппа. Соответственно, множество $\mathbb{Z}$ не будет ни моноидом, ни группой относительно $*$.

Задание 2. Выяснить, будет ли данное бинарное отношение $x \leqslant 1 - y$, заданное на множестве действительных чисел, отношением порядка, а $x = -y$ — отношением эквивалентности.

Решение.

а) Бинарное отношение порядка должно обладать следующими свойствами:

1) антисимметричность: $x * y$ и $y * x$ только в том случае, когда $x = y$;

2) транзитивность: $x * y$ и $y * z \Rightarrow x * z$.

В нашем случае $x * y$ означает, что $x \leqslant 1 - y$. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} x \leqslant 1 - y, \\ y \leqslant 1 - x. \end{cases}$$

Решением этой системы является, например, пара чисел $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, хотя $x \neq y$. Итак, свойство антисимметричности отсутствует, следовательно, данное бинарное отношение не является отношением порядка.

б) Бинарное отношение эквивалентности обладает следующими свойствами.

1) рефлексивность: $x * x$;

2) симметричность: $x * y \Leftrightarrow y * x$;

3) транзитивность: $x * y$ и $y * z \Rightarrow x * z$.

В нашем случае $x * x$ означает, что $x = -x$, что верно только при $x = 0$. Следовательно, данное бинарное отношение не рефлексивно и не может быть отношением эквивалентности.

Работа 5. Линейная алгебра

Задание 1.

а) Вычислить данный определитель, разложив его по какой-либо строке (или столбцу).

б) Вычислить этот же определитель методом Гаусса (приведением к треугольному виду).

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

а) Очевидно, лучше всего разложить Δ по второму столбцу, так как в нем есть только один ненулевой элемент.

$$\Delta = (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix}.$$

Теперь можно воспользоваться методом треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 7 - 6 - (-2 - 28 - 6) = 45.$$

б) Приведем определитель к треугольному виду. Сначала поменяем местами первые два столбца и первые две строчки. Определитель дважды сменит знак:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \end{vmatrix}.$$

Теперь поменяем местами второй и четвертый столбцы (в четвертом столбце элементы делятся друг на друга, поэтому к ним проще применить метод Гаусса). Затем вычтем вторую строку из третьей и добавим к четвертой.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \end{vmatrix} (-1) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & -5 \end{vmatrix}.$$

Меняем местами последние два столбца и добавляем третью строку к четвертой:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}.$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, поэтому

$$\Delta = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 = 45.$$

Задание 2.

а) Решить данное уравнение с помощью обратной матрицы (обратную матрицу найти с помощью элементарных преобразований).

б) Переписать данное уравнение в виде системы линейных уравнений и решить его методом Крамера. Сравнить ответы.

$$\left(X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. а) Воспользуемся равенством $(AB)^T = B^T A^T$ и запишем данное уравнение в виде

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X^T = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $A \cdot X^T = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Умножим обе части этого равенства слева на A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$E \cdot X^T = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$X^T = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для решения уравнения необходимо найти A^{-1}. Убедимся, что A^{-1} существует, т. е. что матрица A невырожденная.

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - (-12 + 15 + 0) = -1 \neq 0.$$

Найдем A^{-1} методом элементарных преобразований.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 10 & -13 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 7 & -9 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 10 & -20 & 30 & 0 & 10 & 0\\ 0 & 10 & -13 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 21 & -27 & 0 & -9 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 10 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 10 & -13 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 10 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 10 & -13 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 10 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -3 & 21 & -15 & -30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 10 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 10 & 0 & 0 & 30 & -20 & -40\\ 0 & 1 & 0 & -9 & 6 & 13\\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -9 & 6 & 13\\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & 10 \end{array}\right).$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4\\ -9 & 6 & 13\\ -7 & 5 & 10 \end{pmatrix}$. Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4\\ -9 & 6 & 13\\ -7 & 5 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 15-0-14 & -10+0+10 & -20+0+20\\ 3+18-21 & -2-12+15 & -4-26+30\\ 9-9-0 & -6+6+0 & -12+13+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Теперь найдем X^T:

$$X^T = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8\\ -3\\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4\\ -9 & 6 & 13\\ -7 & 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8\\ -3\\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 24+6-28\\ -72-18+91\\ -56-15+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}^T = (2,\ 1,\ -1).$$

б) Перепишем данное уравнение в виде системы линейных уравнений. Пусть матрица X имеет размеры $m \times n$. Мы умножаем X

слева на квадратную матрицу 3×3, поэтому $n = 3$, а произведение имеет размеры $m \times 3$, или, после транспонирования, $3 \times m$. Столбец $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ имеет размеры 3×1, поэтому $m = 1$. Итак, X — вектор-строка, содержащая три координаты. Обозначим $X = (x;\, y;\, z)$. Тогда

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = (x,\, y,\, z) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = (5x+2z,\ x-2y+3z,\ 3x+y).$$

Транспонируя, переписываем исходное уравнение в виде

$$\begin{pmatrix} 5x+2z \\ x-2y+3z \\ 3x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{cases} 5x+2z = 8 \\ x-2y+3z = -3 \\ 3x+y = 7. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

то есть наша система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 0 - (-26 + 24 - 0) = -2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 14 + 72 - (-18 + 105 + 0) = -1,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -70 + 8 + 0 - (-48 - 15 + 0) = 1.$$

Отсюда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 2, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -1.$$

Сравнивая эти числа с координатами вектора X, найденного в пункте а), убеждаемся, что ответы совпадают.

Задание 3.

а) Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств, натянутых на данные системы векторов.

б) Найти базис ортогонального дополнения к сумме P и Q.

$$P\colon \langle(0,\,1,\,3,\,2,\,-1);\,(-1,\,1,\,1,\,1,\,1);\,(1,\,0,\,2,\,-1,\,0);\,(1,\,0,\,2,\,1,\,-2)\rangle,$$
$$Q\colon \langle(0,\,1,\,3,\,0,\,1);\,(1,\,0,\,0,\,0,\,3);\,(0,\,1,\,3,\,2,\,-1)\rangle.$$

Решение. а) Пусть пространство P — это линейная оболочка системы векторов

$$\overline{p}_1 = (0,\,1,\,3,\,2,\,-1),\qquad \overline{p}_2 = (-1,\,1,\,1,\,1,\,1),$$
$$\overline{p}_3 = (1,\,0,\,2,\,-1,\,0),\qquad \overline{p}_4 = (1,\,0,\,2,\,1,\,-2).$$

Пространство Q — линейная оболочка системы векторов

$$\overline{q}_1 = (0,\,1,\,3,\,0,\,1),\quad \overline{q}_2 = (1,\,0,\,0,\,0,\,3),\quad \overline{q}_3 = (0,\,1,\,3,\,2,\,-1).$$

Для начала найдем базисы пространств P и Q. Для этого составим матрицу из координат порождающих векторов и приведем ее к ступенчатому виду. Для пространства P:

$$\begin{pmatrix} 1&0&2&-1&0\\ 1&0&2&1&-2\\ -1&1&1&1&1\\ 0&1&3&2&-1 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 1&0&2&-1&0\\ 0&0&0&2&-2\\ 0&1&3&0&1\\ 0&1&3&2&-1 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 1&0&2&-1&0\\ 0&1&3&2&-1\\ 0&0&0&2&-2\\ 0&0&0&2&-2 \end{pmatrix}.$$

Итак, один из четырех векторов оказался лишним, размерность P (совпадающая с рангом полученной матрицы) равна 3.

Для пространства Q:

$$\begin{pmatrix} 0&1&3&0&1\\ 1&0&0&0&3\\ 0&1&3&2&-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0&3\\ 0&1&3&0&1\\ 0&1&3&2&-1 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0&3\\ 0&1&3&0&1\\ 0&0&0&-2&2 \end{pmatrix}.$$

Первый, второй и четвертый столбцы этой матрицы образуют невырожденный минор третьего порядка, так что $\dim Q = 3$. Заметим, что строки получившихся матриц можно принять за базисы P и Q соответственно. Пространство $P+Q$ — линейная оболочка системы шести векторов, составляющих базис P и базис Q. Ищем базис $P+Q$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (-1) \\ \\ (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Строки полученной матрицы образуют базис $P+Q$, ранг матрицы равен 4, то есть $\dim(P+Q)=4$.

Чтобы найти размерность и базис $P \cap Q$, запишем P и Q как множества решений некоторой системы линейных уравнений. Пусть $\overline{a} = (x,\, y,\, z,\, t,\, s)$ — произвольный вектор. Если $\overline{a} \in P$, то $\overline{a}$ — линейная комбинация векторов, образующих базис P. Это означает, что если выписать координаты базисных векторов как столбцы некоторой матрицы, то ранг этой матрицы не изменится от добавления нового столбца — координат вектора $\overline{a}$. Например, для векторов $\overline{p_2}$, $\overline{p_3}$ и $\overline{p_1}$

$$r\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 2 & 3 & z \\ 1 & -1 & 2 & t \\ 1 & 0 & -1 & s \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3.$$

Преобразуем эту матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 2 & 3 & z \\ 1 & -1 & 2 & t \\ 1 & 0 & -1 & s \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & 3 & 3 & x+z \\ 0 & 0 & 2 & x+t \\ 0 & 1 & -1 & x+s \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & z+x-3(x+y) \\ 0 & 0 & 2 & x+t \\ 0 & 0 & -2 & x+s-(x+y) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & z-2x-3y \\ 0 & 0 & 2 & x+t \\ 0 & 0 & -2 & s-y \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 2 & x+t \\ 0 & 0 & 0 & z-2x-3y \\ 0 & 0 & 0 & s-y+t+x \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 3, если две последние строчки нулевые. Итак, вектор $\overline{a} \in P$ тогда и только тогда, когда его координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} z-2x-3y=0 \\ s-y+t+x=0. \end{cases}$$

Это и есть система уравнений, решением которой является пространство P. (Заметим, что у нас 5 переменных и два независимых уравнения, поэтому размерность пространства решений равна трем.) Аналогично найдем систему уравнений для пространства Q:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 3 & 3 & z \\ 0 & 0 & 2 & t \\ 3 & 1 & -1 & s \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 3 & 3 & z \\ 0 & 0 & 2 & t \\ 0 & 1 & -1 & s-3x \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-3y \\ 0 & 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & -2 & s-3x-y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-3y \\ 0 & 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 0 & s-3x-y+t \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 0 & z-3y \\ 0 & 0 & 0 & s-3x-y+t \end{pmatrix}.$$

Искомая система имеет вид:

$$\begin{cases} z-3y=0 \\ s-3x-y+t=0. \end{cases}$$

Вектор из $P \cap Q$ должен удовлетворять обеим системам уравнений, поэтому $P \cap Q$ — это множество решений системы

$$\begin{cases} z - 2x - 3y = 0 \\ s - y + t + x = 0 \\ z - 3y = 0 \\ s - 3x - y + t = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Первые три столбца полученной матрицы образуют невырожденный минор третьего порядка, поэтому в качестве свободных переменных можно взять t и s:

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y = -t - s \\ z = 3t + 3s \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t + s \\ z = 3t + 3s. \end{cases}$$

Полагая $t = 1$, $s = 0$, а затем $t = 0$, $s = 1$, получаем фундаментальную систему решений, которая и будет базисом $P \cap Q$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\dim P \cap Q = 2$.

Проверим, выполняется ли равенство:

$$\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim P \cap Q.$$

Имеем

$$4 = 3 + 3 - 2,$$

так что равенство выполняется.

б) Найдем базис $(P + Q)^{\perp}$.

Если $\overline{a} \in (P+Q)^{\perp}$, то вектор $\overline{a}$ ортогонален всем векторам, образующим базис $P+Q$. Если $\overline{a}=(x,\,y,\,z,\,t,\,s)$, то координаты вектора $\overline{a}$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x+2z-t=0 \\ y+3z+s=0 \\ -2z+t+3s=0 \\ -2t+2s=0. \end{cases}$$

Матрица этой системы уже имеет трапециевидный вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первые четыре столбца образуют невырожденный минор четвертого порядка, поэтому в качестве свободной переменной можно взять s:

$$\begin{cases} x+2z-t=0 \\ y+3z=-s \\ -2z+t=-3s \\ -2t=-2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z-s=0 \\ y+3z=-s \\ -2z+s=-3s \\ t=s \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=s \\ y+3z=-s \\ z=2s \\ t=s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3s \\ y=-7s \\ z=2s \\ t=s. \end{cases}$$

Полагая $s=1$, получаем базис $(P+Q)^{\perp}$: $\overline{a}=\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Итак, $\dim(P+Q)^{\perp}=1$ и равенство $\dim(P+Q)+\dim(P+Q)^{\perp}=5$ выполняется.

Задание 4. Найти какой-нибудь базис и определить размерность пространства решений системы.

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4+2x_5=0 \\ x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0. \end{cases}$$

Решение. Запишем матрицу этой системы и приведем ее к трапециевидному виду:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 4 & -3 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 2, причем первые два столбца образуют невырожденный минор второго порядка. Поэтому в качестве свободных переменных можно взять x_3, x_4 и x_5.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 + 2x_4 - x_5 \\ 2x_2 = 3x_3 - x_4 - x_5, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0,5x_3 + 1,5x_4 - 1,5x_5 \\ x_2 = 1,5x_3 - 0,5x_4 - 0,5x_5. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = 0$, затем $x_4 = 2$, $x_3 = x_5 = 0$ и $x_5 = 2$, $x_3 = x_4 = 0$, находим фундаментальную систему решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix}-3\\-1\\0\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Это и будет базис пространства решений. Таким образом, пространство решений этой системы трехмерно. Общее решение имеет вид:

$$X = c_1 \begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\\0\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\2\\0\end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix}-3\\-1\\0\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 11e_3 \\ e_2' = \dfrac{11}{10}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \qquad X = \begin{pmatrix}1\\10\\10\end{pmatrix}.$$

Решение. Составим матрицу перехода C от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3', считая, что столбцы этой матрицы — это координаты нового базиса в старом.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{10} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через Y вектор-столбец, составленный из координат вектора $\overline{x}$ в новом базисе. Тогда

$$X = CY,$$

где X — столбец из координат $\overline{x}$ в старом базисе. Обозначая элементы столбца Y как y_1, y_2 и y_3, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = y_1 + \dfrac{11}{10} y_2 - y_3 \\ 10 = y_1 - y_2 + y_3 \\ 10 = 11y_1 + y_3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$y_1 = 11, \qquad y_2 = -110, \qquad y_3 = -111.$$

Итак, в новом базисе вектор $\overline{x}$ имеет координаты $\begin{pmatrix} 11 \\ -110 \\ -111 \end{pmatrix}$.

Задание 6. Являются ли линейными следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x &= (x_1^2, x_1 - x_3, x_2 + x_3), \\ \mathcal{B}x &= (x_1 + 2, x_1 + x_2, x_3), \\ \mathcal{C}x &= (x_1, x_1 - x_3, x_2 + x_3), \end{aligned}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$?

Решение.

а) Преобразование $\mathcal{A}$ линейно, если

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot \mathcal{A}x + \beta \cdot \mathcal{A}y.$$

Найдем $\mathcal{A}(\alpha x + \beta y)$, где $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$, $y = (y_1,\, y_2,\, y_3)$.

$\mathcal{A}(\alpha x+\beta y) = ((\alpha x_1+\beta y_1)^2,\ \alpha x_1+\beta y_1-\alpha x_3-\beta y_3,\ \alpha x_2+\beta y_2+\alpha x_3+\beta y_3)$.

(На первом месте стоит квадрат первой координаты вектора $\alpha x + \beta y$, на втором — разность первой и третьей координат, на третьем — сумма второй и третьей координат вектора $\alpha x + \beta y$.) В то же время

$$\alpha\mathcal{A}x + \beta\mathcal{A}y = \alpha(x_1^2,\, x_1 - x_3,\, x_2 + x_3) + \beta(y_1^2,\, y_1 - y_3,\, y_2 + y_3) =$$
$$= (\alpha x_1^2 + \beta y_1^2,\; \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x_3 - \beta y_3,\; \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3).$$

Как видим, $\alpha\mathcal{A}x+\beta\mathcal{A}y \neq \mathcal{A}(\alpha x+\beta y)$, так как $\alpha x_1^2 + \beta y_1^2 \neq (\alpha x_1 + \beta y_1)^2$. Следовательно, преобразование $\mathcal{A}$ не является линейным.

б) Находим

$$\mathcal{B}(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1 + 2, \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3).$$

В то же время

$$\alpha\mathcal{B}(x) + \beta\mathcal{B}(y) = \alpha(x_1 + 2, x_1 + x_2, x_3) + \beta(y_1 + 2, y_1 + y_2, y_3) =$$
$$= (\alpha x_1 + \beta y_1 + 2\alpha + 2\beta, \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3).$$

Мы видим, что

$$\mathcal{B}(\alpha x + \beta y) \neq \alpha \cdot \mathcal{B}(x) + \beta \cdot \mathcal{B}(y),$$

потому что $2\alpha+2\beta = 2$ не для всех α и β. Преобразование $\mathcal{B}$ не линейно.

в) Как и в предыдущих случаях, находим

$$\mathcal{C}(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x_3 - \beta y_3, \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3)$$

и

$$\alpha \cdot \mathcal{C}(x) + \beta \cdot \mathcal{C}(y) = \alpha(x_1, x_1 - x_3, x_2 + x_3) + \beta(y_1, y_1 - y_3, y_2 + y_3) =$$
$$= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x_3 - \beta y_3, \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3).$$

Как видим, на сей раз

$$\mathcal{C}(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot \mathcal{C}(x) + \beta \cdot \mathcal{C}(y)$$

и преобразование $\mathcal{C}$ линейно.

Задание 7. Пусть $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$, $\mathcal{A}x = (x_2 - x_3,\, x_1,\, x_1 + x_3)$, $\mathcal{B}x = (x_2,\, 2x_3,\, x_1)$. Найти $(\mathcal{B}(2\mathcal{A} + \mathcal{B}))x$.

Решение. Напишем матрицу A, соответствующую преобразованию $\mathcal{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы учли, что

$$\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_3\\x_1\\x_1+x+3\end{pmatrix}.$$

Аналогично, линейному преобразованию $\mathcal{B}$ соответствует матрица B:

$$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Найдем $B(2A+B)$.

$$2A+B=2\cdot\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&-2\\2&0&2\\3&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&-2\\2&0&2\\3&0&2\end{pmatrix}.$$

$$B(2A+B)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&-2\\2&0&2\\3&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\6&0&4\\0&3&-2\end{pmatrix}.$$

Теперь найдем $B\cdot(2A+B)\cdot X$.

$$\begin{pmatrix}2&0&2\\6&0&4\\0&3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+2x_3\\6x_1+4x_3\\3x_2-2x_3\end{pmatrix}.$$

Итак, $(\mathcal{B}(2\mathcal{A}+\mathcal{B}))x=(2x_1+2x_3,\, 6x_1+4x_3,\, 3x_1-2x_3)$.

Задание 8. Найти матрицу некоторого линейного оператора в базисе $(e_1',\, e_2',\, e_3')$, где

$$e_1'=e_2+2e_3,\qquad e_2'=e_1-e_3,\qquad e_3'=e_1+e_2,$$

если в базисе $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ его матрица имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

Решение. Напишем матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3':

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрице A в базисе e_1, e_2, e_3 соответствует матрица A_1 в базисе e_1', e_2', e_3', где $A_1 = C^{-1}AC$. Найдем C^{-1} методом алгебраических дополнений.

$$\det C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

$$\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\mathcal{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\mathcal{A}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\mathcal{A}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

$$\mathcal{A}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\mathcal{A}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\mathcal{A}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\mathcal{A}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Записываем C^{-1}:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, правильно ли найдена обратная матрица:

$$C^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Теперь найдем A_1.

$$A_1 = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Итак, в новом базисе матрица равна $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

Задание 9. Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $x - \sqrt{3}z = 0$.

Решение. Найдем какой-нибудь базис плоскости $x - \sqrt{3}z = 0$. В качестве первого из базисных векторов возьмем $\overline{e}_1 = (0, 1, 0)$. Вектор $\overline{e}_2$ выберем так, чтобы $\overline{e}_2 \in xOz$. Это означает, что $\overline{e}_2 = (x, 0, z)$. Учитывая, что координаты $\overline{e}_2$ удовлетворяют уравнению $x - \sqrt{3}z = 0$, берем в качестве $\overline{e}_2$ вектор $(\sqrt{3}, 0, 1)$. Пусть $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — произвольный вектор. Нам надо представить $\overline{a}$ в виде суммы $\overline{b} + \overline{c}$, где векторы $\overline{b}$ и $\overline{c}$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} \overline{b} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2, \\ (\overline{c}, \overline{e}_1) = 0, \\ (\overline{c}, \overline{e}_2) = 0 \end{cases}$$

(то есть вектор $\overline{b}$ лежит в плоскости $x - \sqrt{3}z = 0$, а вектор $\overline{c}$ ей перпендикулярен). Итак,

$$\overline{b} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 = (0, x, 0) + (\sqrt{3}, 0, y) = (\sqrt{3}y, x, y).$$

Тогда $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b} = (a_1 - \sqrt{3}y, a_2 - x, a_3 - y)$. Для определения x и y воспользуемся системой уравнений

$$\begin{cases} (\overline{c}, \overline{e}_1) = 0 \\ (\overline{c}, \overline{e}_2) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_2 - x = 0 \\ \sqrt{3}a_1 - 3y + a_3 - y = 0. \end{cases}$$

Получаем $x = a_2$, $y = \dfrac{\sqrt{3}a_1 + a_3}{4}$. Отсюда

$$\overline{b} = \Big(\frac{3a_1 + \sqrt{3}a_3}{4},\, a_2,\, \frac{\sqrt{3}a_1 + a_3}{4}\Big),$$

то есть фактически мы ищем оператор $\mathcal{A}$, переводящий произвольный вектор $(a_1,\, a_2,\, a_3)$ в вектор $\Big(\dfrac{3a_1 + \sqrt{3}a_3}{4},\, a_2,\, \dfrac{\sqrt{3}a_1 + a_3}{4}\Big)$.[1] Ему соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Найдем образ (область значений) этого оператора. Посмотрим, во что переходят векторы, образующие базис $\mathbb{R}^3$.

$$\overline{v}_1 = A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/4\\0\\\sqrt{3}/4\end{pmatrix},\ \overline{v}_2 = A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \overline{v}_3 = A\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/4\\0\\1/4\end{pmatrix}.$$

Образ оператора $\mathcal{A}$ — линейная оболочка трех найденных векторов. Но $\overline{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\overline{v}_1$, поэтому в качестве базиса можно взять $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$ (они, очевидно, линейно независимы). Тогда $\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A}) = 2$.

Теперь найдем ядро оператора $\mathcal{A}$. Это множество решений уравнения $AX = 0$. Если обозначить $X = (x,\, y,\, z)$, то получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}z = 0 \\ y = 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}x + \dfrac{1}{4}z = 0, \end{cases} \qquad \text{откуда} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{z}{\sqrt{3}} \\ y = 0. \end{cases}$$

При $z = 1$ получаем фундаментальную систему решений $\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\0\\1\end{pmatrix}$, которая и будет базисом $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ (т. е. $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ — это прямая, перпендикулярная плоскости $x - \sqrt{3}z = 0$). Таким образом, $\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A}) = 1$.

[1] Рассуждая так же, как в задании 6, можно доказать, что такой оператор линеен.

Заметим, что $\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A}) + \dim(\operatorname{Im}\mathcal{A}) = 1 + 2 = 3$ (сумма размерностей ядра и образа равна размерности исходного пространства).

Задание 10. Найти собственные числа и жорданову форму данных матриц.

Решение.

а)
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристический многочлен матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 8 & 6 \\ -4 & 10-\lambda & 6 \\ 4 & -8 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2.$$

Собственные числа матрицы A — это корни характеристического многочлена, то есть $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Однократному корню $\lambda_1 = 0$ соответствует одна одномерная клетка Жордана. Собственное число $\lambda = 2$ имеет кратность 2, поэтому ему может соответствовать одна двумерная или две одномерные клетки. Собственные векторы, соответствующие этому собственному числу, удовлетворяют системе уравнений
$$(A - 2E) \cdot X = 0$$
с матрицей
$$A - 2E = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ -4 & 8 & 6 \\ 4 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\operatorname{rg}(A - 2E) = 1$, эта система имеет два линейно независимых решения, а двум линейно независимым собственным векторам соответствуют две клетки Жордана с собственным числом $\lambda = 2$. Итак, жорданова форма матрицы A

$$J_A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

(или $\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$, так как J_A определена с точностью до перестановки клеток).

б)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -3 & -3-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3.$$

У матрицы A есть единственное собственное число $\lambda = 0$ кратности 3. Ему могут соответствовать три одномерные, одна трехмерная или две (одномерная и двумерная) клетки Жордана. Найдем количество линейно независимых собственных векторов. Поскольку

$$\operatorname{rg}(A - \lambda E) = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 1,$$

система уравнений

$$(A - \lambda E) \cdot X = 0$$

имеет два линейно независимых решения и матрица J_A содержит две клетки Жордана. Таким образом (с точностью до перестановки клеток),

$$J_A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

в)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы A.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(4-\lambda)(2-\lambda)^2-3-3-(-3(2-\lambda)+4-\lambda-3(2-\lambda))=-\lambda^3+8\lambda^2-25\lambda+18.$$

Теперь решим уравнение

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 25\lambda + 18 = 0,$$
$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 18 = 0.$$

Один из корней, очевидно, $\lambda_1 = 1$. Чтобы найти остальные корни, разделим наш многочлен на $\lambda - 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 18 & \lambda - 1 \\
\cline{2-2}
\underline{\lambda^3 - \ \lambda^2 \qquad\qquad\quad} & \lambda^2 - 7\lambda + 18 \\
-7\lambda^2 + 25\lambda - 18 & \\
\underline{-7\lambda^2 \qquad + 7\lambda} & \\
18\lambda - 18 & \\
\underline{18\lambda - 18} & \\
0 &
\end{array}
$$

Решим уравнение $\lambda^2 - 7\lambda + 18 = 0$:

$$D = 49 - 72 = -23$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{7 + \sqrt{-23}}{2} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2} i.$$

Данная матрица имеет три различных собственных значения, поэтому ее жорданова форма —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2} i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2} i \end{pmatrix}.$$

Задание 11. Привести данные квадратичные формы к каноническому (диагональному) виду методом Лагранжа.

Решение. При выделении полных квадратов мы будем пользоваться следующим тождеством:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - \\ - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2,$$

справедливым во всех случаях, когда $a_{11} \neq 0$.

а) $F(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$.

Здесь $a_{11} = 1 \neq 0$, поэтому

$$F(x) = \frac{1}{1}(x_1 + x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{1}(x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2 = \\ = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2.$$

Обозначим $x_1 + x_2 + x_3 = y$ и применим ту же самую формулу к оставшимся трем слагаемым, где роль первой по счету переменной будет играть x_2. (Заметим, что переменная x_1 в записи $F(x)$ уже не встречается.) Итак,

$$F(x) = y_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 = y_1^2 + \frac{1}{1}(x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{1}x_3^2 + 2x_3^2 =$$
$$= y_1^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2.$$

Обозначая $x_2 + x_3 = y_2$ и $x_3 = y_3$, получаем, что

$$F(x) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

где

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

б) $F(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$.
Поскольку $a_{11} = 2 \neq 0$, воспользуемся той же самой формулой:

$$F(x) = \frac{1}{2}(2x_1 - 2x_2 + x_4)^2 - \frac{1}{2}(-2x_2 + x_4)^2 +$$
$$+ 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4 =$$
$$= \frac{1}{2}(2x_1 - 2x_2 + x_4)^2 + 2x_3^2 + \frac{3}{2}x_4^2 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4 + 2x_2x_4 =$$
$$= \frac{1}{2}y_1^2 + 2x_3^2 + \frac{3}{2}x_4^2 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4 + 2x_2x_4,$$

где $y_1 = 2x_1 - 2x_2 + x_4$. Поскольку теперь коэффициент перед x_2^2 равен нулю, будем выделять полный квадрат, начиная с переменной x_3:

$$F(x) = \frac{1}{2}y_1^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4 + \frac{3}{2}x_4^2 + 2x_2x_4 =$$
$$= \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}(2x_3 + x_2 - 2x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 2x_4)^2 + \frac{3}{2}x_4^2 + 2x_2x_4 =$$
$$= \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 4x_2x_4 - \frac{1}{2}x_4^2,$$

где $y_2 = 2x_3 + x_2 - 2x_4$. Осталось выделить полный квадрат из последних трех слагаемых:

$$F(x)=\frac{1}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\frac{1}{-1/2}\left(-\frac{1}{2}x_2+2x_4\right)^2-\frac{1}{-1/2}(2x_4)^2-\frac{1}{2}x_4^2=$$
$$=\frac{1}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2-2y_3^2+\frac{15}{2}x_4^2,$$

где $y_3=-\frac{1}{2}x_2+2x_4$. Обозначая $y_4=x_4$, переписываем квадратичную форму $F(x)$ в виде:

$$F(x)=\frac{1}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2-2y_3^2+\frac{15}{2}y_4^2.$$

Мы сделали замену переменных:

$$\begin{cases} y_1=2x_1-2x_2+x_4 \\ y_2=2x_3+x_2-2x_4 \\ y_3=-\dfrac{1}{2}x_2+2x_4 \\ y_4=x_4. \end{cases}$$

в) $F(x)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$.

На сей раз $F(x)$ не содержит ни одного квадрата, поэтому сначала сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases}$$

после которой $F(x)$ приобретает вид:

$$F(x)=(y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1-y_2)y_3+(y_1+y_2)y_3=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3.$$

Действуя так же, как и в предыдущих случаях, получаем

$$F(x)=\frac{1}{1}(y_1+y_3)^2-\frac{1}{1}y_3^2-y_2^2=z_1^2-z_2^2-z_3^2,$$

где

$$\begin{cases} z_1=y_1+y_3, \\ z_2=y_2, \\ z_3=y_3. \end{cases}$$

Задание 12. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:

$$F(x) = -3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Решение. Этой квадратичной форме соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Напомним, что коэффициенты, стоящие при попарных произведениях, делятся пополам.)

Найдем ее собственные значения:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 4 \\ 1 & 9-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-3-\lambda)(9-\lambda)(3-\lambda) + 8 + 8 - (16(9-\lambda) + 4(-3-\lambda) + 3 - \lambda) =$$
$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 30\lambda - 200.$$

Решим уравнение

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 30\lambda + 200 = 0.$$

Один из корней $\lambda_1 = 10$. Разделим наш многочлен на $\lambda - 10$:

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - \ \ 9\lambda^2 - 30\lambda + 200 & \lambda - 10 \\ \cline{2-2} \underline{\lambda^3 - 10\lambda^2 \qquad\qquad\quad} & \lambda^2 + \lambda - 20 \\ \lambda^2 - 30\lambda + 200 & \\ \underline{\lambda^2 \qquad - 10\lambda \ \ \ \ \ \ } & \\ -20\lambda + 200 & \\ \underline{-20\lambda + 200} & \\ 0 & \end{array}$$

Решим уравнение $\lambda^2 + \lambda - 20 = 0$.

$$D = 1 + 80 = 81.$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm 9}{2}, \quad \text{т.е.} \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = -5.$$

Итак, можно подобрать такое ортогональное преобразование, после которого наша квадратичная форма примет вид:

$$F(x) = 10y_1^2 + 4y_2^2 - 5y_3^2.$$

Работа 6. Аналитическая геометрия

Задание 1. Написать разложение вектора $\overline{x}$ по векторам $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$.

$$\overline{x} = (15,\ -20,\ -1),\quad \overline{p} = (0,\ 2,\ 1),\quad \overline{q} = (0,\ 1,\ -1),\quad \overline{r} = (5,\ -3,\ 2).$$

Решение. Пусть $\overline{x} = \alpha \cdot \overline{p} + \beta \cdot \overline{q} + \gamma \cdot \overline{r}$, где α, β и γ — некоторые неизвестные константы. Тогда вектор-столбец X координат вектора $\overline{x}$ равен

$$X = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\gamma \\ -3\gamma \\ 2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\gamma \\ 2\alpha + \beta - 3\gamma \\ \alpha - \beta + 2\gamma \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, $X = \begin{pmatrix} 15 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix}$. Сравнивая соответствующие координаты, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 5\gamma = 15 \\ 2\alpha + \beta - 3\gamma = -20 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = -1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$\begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 3. \end{cases}$$

Итак, $\overline{x} = -6\overline{p} + \overline{q} + 3\overline{r}$.

Задание 2. Коллинеарны ли векторы $\overline{c}_1 = 4\overline{a} - 3\overline{b}$ и $\overline{c}_2 = 9\overline{b} - 12\overline{a}$, если $\overline{a} = (-1,\ 2,\ 8)$, $\overline{b} = (3,\ 7,\ -1)$?

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{c}_1$ и $\overline{c}_2$.

$$\overline{c}_1 = 4\overline{a} - 3\overline{b} = (4 \cdot (-1) - 3 \cdot 3,\ 4 \cdot 2 - 3 \cdot 7,\ 4 \cdot 8 - 3 \cdot (-1)) = \\ = (-13,\ -13,\ 35),$$

$$\overline{c}_2 = 9\overline{b} - 12\overline{a} = (9 \cdot 3 - 12 \cdot (-1),\ 9 \cdot 7 - 12 \cdot 2,\ 9 \cdot (-1) - 12 \cdot 8) = \\ = (39,\ 39,\ -105).$$

Векторы коллинеарны, если пропорциональны их соответствующие координаты. Сравним координаты $\overline{c}_1$ и $\overline{c}_2$.

$$\frac{-13}{39} = \frac{-13}{39} = \frac{35}{-105} = \frac{1}{-3},$$

следовательно, $\overline{c}_1$ и $\overline{c}_2$ коллинеарны.

Задание 3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 3\overline{p} + 2\overline{q}$ и $\overline{b} = 2\overline{p} - \overline{q}$, если $|\overline{p}| = 4$, $|\overline{q}| = 3$, $\widehat{\overline{p}\,\overline{q}} = \frac{3\pi}{4}$.

Решение. Воспользуемся свойством векторного произведения векторов:

$$S = |\overline{a}\times\overline{b}| = |(3\overline{p}+2\overline{q})\times(2\overline{p}-\overline{q})| = |3\overline{p}\times 2\overline{p}+2\overline{q}\times 2\overline{p}+3\overline{p}\times(-\overline{q})+2\overline{q}\times(-\overline{q})|.$$

Учитывая, что $\overline{p} \times \overline{q} = -\overline{q} \times \overline{p}$, получаем

$$S = |6\overline{p} \times \overline{p} + 4\overline{q} \times \overline{p} + 3\overline{q} \times \overline{p} - 2\overline{q} \times \overline{q}|.$$

Как известно, векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нулю, в частности, $\overline{p} \times \overline{p} = \overline{q} \times \overline{q} = 0$. Поэтому

$$S = |7\overline{q} \times \overline{p}| = 7|\overline{q} \times \overline{p}|.$$

По определению векторного произведения векторов:

$$|\overline{q} \times \overline{p}| = |\overline{q}| \cdot |\overline{p}| \cdot \sin\widehat{\overline{p}\,\overline{q}},$$

так что

$$S = 7 \cdot |\overline{q}| \cdot |\overline{p}| \cdot \sin\widehat{\overline{p}\,\overline{q}} = 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin\frac{3\pi}{4} = 43\sqrt{2}.$$

Задание 4. Компланарны ли векторы $\overline{a} = (7,\ 4,\ 6)$, $\overline{b} = (2,\ 1,\ 1)$ и $\overline{c} = (19,\ 11,\ 17)$?

Решение. Векторы компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. Найдем $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0.$$

Следовательно, $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны.

Задание 5.

а) Вычислить объем тетраэдра C с вершинами в точках $A_1(1,\,-1,\,2)$, $A_2(2,\,1,\,2)$, $A_3(1,\,1,\,4)$, $A_4(6,\,-3,\,8)$.

Решение. Можно считать, что тетраэдр построен на векторах $\overline{A_1A_2}=(1,\,2,\,0)$, $\overline{A_1A_3}=(0,\,2,\,2)$, $\overline{A_1A_4}=(5,\,-2,\,6)$.

Воспользуемся свойством смешанного произведения векторов:

$$V_{A_1A_2A_3A_4}=\pm\frac{1}{6}\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4},$$

где знак выбирается так, чтобы объем был положителен. Найдем $\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}$:

$$\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 5 & -2 & 6\end{vmatrix}=36.$$

Тогда $V_{A_1A_2A_3A_4}=\dfrac{1}{6}\cdot 36=6$ куб. ед.

б) Найти высоту этого тетраэдра, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Найдем площадь грани $A_1A_2A_3$. Как известно,

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}|.$$

Найдем векторное произведение $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$:

$$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}.$$

Модуль этого вектора

$$|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}|=\sqrt{4^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{24}.$$

Тогда

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{24}=\sqrt{6}.$$

Как известно,

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{3} S_{A_1A_2A_3} \cdot H,$$

где H — искомая высота. Отсюда

$$H = \frac{3V_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{A_1A_2A_3}} = \frac{3 \cdot 6}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{6}.$$

Задание 6. Найти расстояние от точки $M(1,\,-1,\,2)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(1,\,5,\,7)$, $M_2(-3,\,6,\,3)$, $M_3(-2,\,7,\,3)$.

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-7 \\ -4 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

то есть

$$(x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - (y-5) \cdot \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} + (z-7) \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$4x - 4y - 5z + 51 = 0.$$

Если плоскость задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то расстояние от точки $(x_0,\,y_0,\,z_0)$ до этой плоскости можно найти по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

поэтому искомое расстояние равно

$$d = \frac{|4 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 + 51|}{\sqrt{4^2+4^2+5^2}} = \frac{49}{\sqrt{57}} = \frac{49\sqrt{57}}{57}.$$

Задание 7. Найти угол между плоскостями $x + 2y - 2z - 7 = 0$ и $x + y - 35 = 0$.

Решение. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами. Нормальные векторы данных плоскостей $\overline{n}_1 = (1, 2, -2)$, $\overline{n}_2 = (1,\,1,\,0)$. Угол $\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2}$ найдем с помощью скалярного произведения векторов:

$$\cos\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2} = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 0}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Учитывая, что $\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2} \in [0,\, \pi]$, получаем

$$\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2} = \frac{\pi}{4}.$$

Задание 8. Написать канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z + 6 = 0 \\ x - 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выразим первые две переменные через третью:

$$\begin{cases} 2(3y - z - 3) - 3y - 2z + 6 = 0, \\ x = 3y - z - 3, \end{cases}, \qquad \begin{cases} y = \dfrac{4}{3}z, \\ x = 3z - 3. \end{cases}$$

Теперь введем параметр t. Для удобства положим $z = 3t$:

$$\begin{cases} x = 9t - 3 \\ y = 4t \\ z = 3t. \end{cases}$$

Выразим t через каждую из трех переменных. Из первого уравнения следует, что $t = \dfrac{x+3}{9}$, из второго и третьего — $t = \dfrac{y}{4}$ и $t = \dfrac{z}{3}$ соответственно. Искомые уравнения прямой:

$$\frac{x+3}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}.$$

Задание 9. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$$

и плоскости $2x + y + 7z - 3 = 0$.

Решение. Напишем параметрические уравнения данной прямой. Положим

$$t = \frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2},$$

тогда

$$\begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = t + 3 \\ z = -2t - 1. \end{cases}$$

Подставим эти выражения в уравнение плоскости $2x + y + 7z - 3 = 0$:

$$2(3t + 7) + t + 3 + 7(-2t - 1) - 3 = 0,$$
$$-7 + 7 = 0,$$
$$t = 1.$$

Это означает, что прямая пересекает плоскость при $t = 1$. Соответствующие координаты равны:

$$x = 10, \qquad y = 4, \qquad z = -3.$$

Задание 10.

а) Найти точку M', симметричную точке $M(0, 1, 2)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{0}$.

Решение. Пусть точка M' имеет координаты (a, b, c). Тогда

$$\overline{MM'} = (a, b - 1, c - 2).$$

Этот вектор перпендикулярен данной прямой, т. е. $\overline{MM'}$ перпендикулярен направляющему вектору $\bar{l}$ данной прямой. Тогда по свойствам скалярного произведения векторов:

$$\overline{MM'} \cdot \bar{l} = 0.$$

Учитывая, что $\bar{l} = (2, 1, 0)$, получаем

$$a \cdot 2 + (b - 1) \cdot 1 + (c - 2) \cdot 0 = 0,$$

то есть $2a + b - 1 = 0$. Кроме того, середина отрезка $M'M$ должна лежать на данной прямой. Координаты середины отрезка $\dfrac{a+0}{2}$, $\dfrac{b+1}{2}$ и $\dfrac{c+2}{2}$. Подставляя их в уравнения прямой, мы должны получить верное равенство:

$$\frac{\frac{a}{2} - 1}{2} = \frac{\frac{y+1}{2} - 3}{1} = \frac{\frac{c+2}{2} - 2}{0}.$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a + b - 1 = 0 \\ \dfrac{a}{2} - 1 = 2\Big(\dfrac{y+1}{2} - 3\Big) \\ \dfrac{c+2}{2} - 2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим a, b и c. Точка M' имеет координаты $(-1,2;\,3,4;\,2)$.

б) Найти точку M', симметричную точке $M(-2,\,0,\,3)$ относительно плоскости $2x-2y+10z+1=0$.

Пусть M' имеет координаты $(a,\,b,\,c)$. Тогда $\overline{MM'}=(a{+}2,\,b,\,c{-}3)$. Вектор $\overline{MM'}$ перпендикулярен данной плоскости, т. е. параллелен ее нормальному вектору $\overline{n}(2,\,-2,\,10)$. Это означает, что

$$\frac{a+2}{2}=\frac{b}{2}=\frac{c-3}{10}.$$

В то же время точки M и M' равноудалены от плоскости, т. е.

$$\frac{2\cdot(-2)-2\cdot 0+10\cdot 3+1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+10^2}}=-\frac{2a-2b+10c-1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+10^2}}.$$

(Мы учли, что точки M и M' лежат в разных полуплоскостях.) Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{a+2}{2}=\dfrac{b}{-2}=\dfrac{c-3}{10}\\ 27=2a+2b-10c-1.\end{cases}$$

Решая ее, находим, что M' имеет координаты $(-3,\,1,\,-2)$.

Задание 11. Исследовать и построить кривые второго порядка.

Решение.

а) $3x^2-2xy+3y^2-4x-4y-12=0$. Найдем определители данной кривой.

$$\delta=\begin{vmatrix}3&-1\\-1&3\end{vmatrix},\quad \Delta=\begin{vmatrix}3&-1&-2\\-1&3&-2\\-2&-2&-12\end{vmatrix}=-128.$$

Поскольку $\delta>0$, а $\Delta\neq 0$, данная кривая — эллипс. Его центр — это решение системы уравнений

$$\begin{cases}(3x^2-2xy+3y^2-4x-4y-12)'_x=0\\ (3x^2-2xy+3y^2-4x-4y-12)'_y=0,\end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases}6x-2y-4=0\\ -2x+6y-4=0.\end{cases}$$

Итак, центр симметрии эллипса находится в точке $O_1(1;1)$. Если перенести начало координат в эту точку, то в новых координатах уравнение будет иметь вид

$$3x_1^2 - 2x_1y_1 + 3y_1^2 - 16 = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение данной кривой:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 4$. Если обозначить $A_1 = 2$, $C_1 = 4$, то после поворота системы на угол φ, где

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{B}{A_1 - C} = \frac{-1}{2-3} = 1,$$

уравнение эллипса примет вид

$$2X^2 + 4Y^2 - 16 = 0$$

или

$$\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Искомый эллипс так же, как и системы координат Oxy, $O_1x_1y_1$ и O_1XY, изображен на рисунке 12.

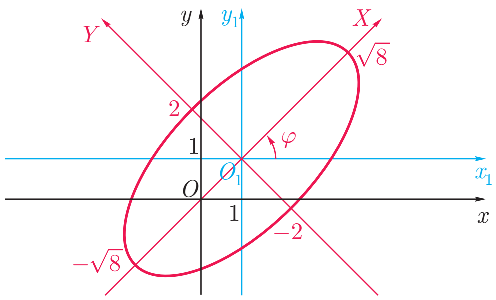

Рис. 12.

б) $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0.$
Здесь

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -8, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 12 \end{vmatrix} = -128,$$

так что данная кривая — гипербола ($\delta < 0, \Delta \neq 0$). Находим координаты ее центра:

$$\begin{cases} 2x - 6y - 4 = 0 \\ -6x + 2y - 4 = 0, \end{cases}$$

и центр симметрии гиперболы находится в точке $O_1(-1; -1)$. Если перенести в эту точку начало координат, то уравнение примет вид

$$x_1^2 - 6x_1y_1 + y_1^2 + 16 = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 4$. Если обозначить $A_1 = -2$, $C_1 = 4$, то после поворота осей координат на угол φ, где

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{-3}{-2-1} = 1,$$

уравнение примет вид

$$-2X^2 + 4Y^2 + 16 = 0$$

или

$$\frac{X^2}{8} - \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Данная гипербола и все системы координат изображены на рисунке 13.

в) $x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$.

Решение. Найдем определители кривой второго порядка:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Мы видим, что $\delta < 0$, а $\Delta = 0$, следовательно, это пара пересекающихся прямых. Найдем центр нашей кривой из уравнений

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0, \end{cases}$$

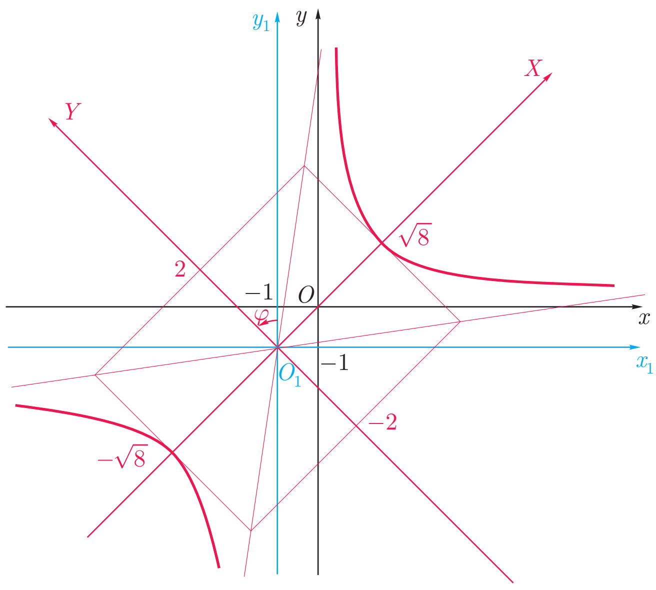

Рис. 13.

где $F = F(x,\, y) = x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1$. Решая систему

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4 = 0 \\ 2y - 4x - 2 = 0, \end{cases}$$

получаем $x = 0$, $y = 1$. Делая замену координат

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y - 1, \end{cases}$$

приводим уравнение нашей кривой к виду

$$x_1^2 + y_1^2 - 4x_1y_1 = 0.$$

Выделим полный квадрат:

$$(x_1 - 2y_1)^2 - 3y_1^2 = 0.$$

Теперь разложим на множители:

$$(x_1 - 2y_1 - \sqrt{3}y_1)(x_1 - 2y_1 + \sqrt{3}y_1) = 0.$$

Итак, в системе координат $x_1O_1y_1$ точки, лежащие на данной кривой второго порядка, удовлетворяют одному из уравнений:

$$x_1 = (2+\sqrt{3})y_1 \quad \text{или} \quad x_1 = (2-\sqrt{3})y_1.$$

Построим эту кривую (рис. 14):

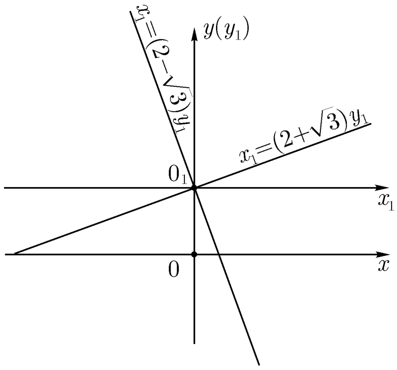

Рис. 14.

г) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$.

Здесь $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, то есть данная кривая не имеет центра. Записываем три первых слагаемых как полный квадрат:

$$(x+2y)^2 - 20x + 10y - 50 = 0.$$

Поскольку $-20x + 10y$ не пропорционально $x + 2y$, данная кривая — парабола (в этом можно убедиться иначе, проверив, что $\Delta \neq 0$). Подберем такие числа m, n и q, чтобы уравнение параболы приняло вид:

$$(x+2y+n)^2 + 2m(2x - y + q) = 0.$$

Раскрывая скобки и сравнивая получающееся выражение с исходным, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 2n + 4m = -20 \quad (\text{коэффициенты при } x) \\ 4n - 2m = 10 \quad (\text{коэффициенты при } y) \\ n^2 + 2mq = -50 \quad (\text{свободные члены}). \end{cases}$$

Отсюда $m = -5$, $n = 0$ и $q = 5$, так что уравнение принимает вид

$$(x + 2y)^2 - 10(2x - y + 5) = 0.$$

Примем за новую ось O_1X прямую $x + 2y = 0$, а за ось O_1Y — прямую $2x - y + 5 = 0$. Тогда в новых координатах X — это расстояние до оси O_1Y, а Y — расстояние до оси O_1X, так что

$$Y = \pm\frac{x + 2y}{\sqrt{5}}, \quad X = \pm\frac{2x - y + 5}{\sqrt{5}}$$

(знаки этих выражений зависят от того, куда мы направим оси координат). Уравнение параболы примет вид

$$Y^2 = 2\sqrt{5}X.$$

Направление осей можно определить, находя некоторые точки параболы. Например, при $x = 0$ мы получим уравнение

$$4y^2 + 10y - 50 = 0,$$

откуда $y = 2,5$ или $y = -5$. Искомая парабола и системы координат изображены на рисунке 15.

д) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$.

Здесь $\delta = \Delta = 0$, и мы должны исследовать пару параллельных прямых. Переписывая данное уравнение в виде

$$(x - 2y)^2 - 6(x - 2y) + 8 = 0,$$

получаем квадратное уравнение относительно $x - 2y$. Его решения — это $x - 2y = 4$ или $x - 2y = 2$. Они определяют пару действительных параллельных прямых (см. рис. 16).

Задание 12. Найти и изобразить на плоскости геометрическое место точек, для которых расстояние до точки $F(-1, 2)$ равно расстоянию до прямой $x = -3$.

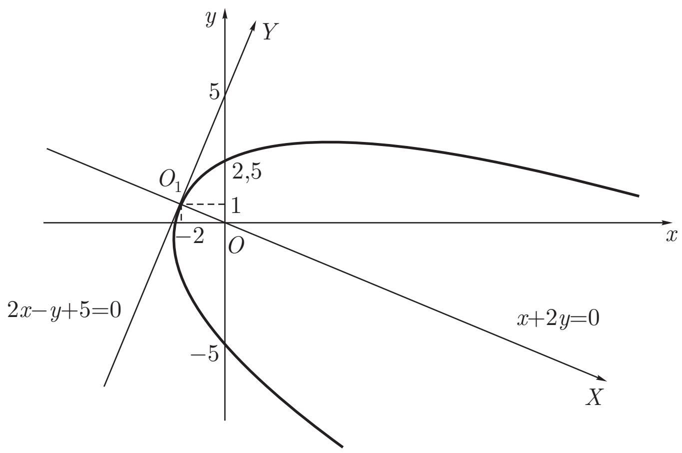

Рис. 15.

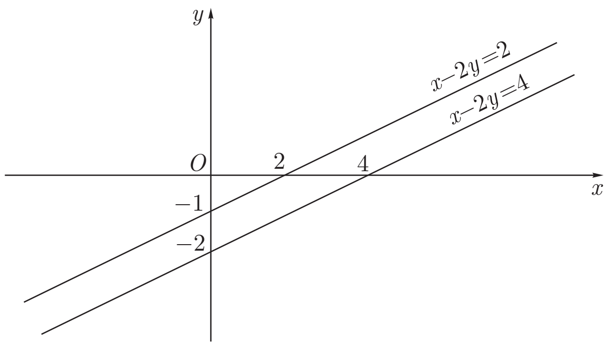

Рис. 16.

Решение. Пусть некоторая точка $M(x,\,y)$ удовлетворяет условию задачи. Расстояние $MF = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$, а расстояние от точки M до прямой $x=-3$ равно $|x+3|$. Выполняется уравнение

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = |x+3|.$$

Преобразуя это уравнение, получаем

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x+3)^2,$$

$$x = \frac{y^2}{4} - y - 1.$$

Это уравнение параболы. Ее график изображен на рисунке 17.

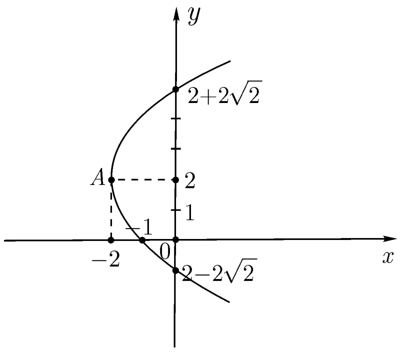

Рис. 17.

Задание 13.

а) Изобразить на плоскости график кривой $\rho = \frac{16}{5-3\cos\varphi}$.

Решение. Это уравнение кривой второго порядка. Преобразуем его:

$$\rho = \frac{\frac{16}{5}}{1 - \frac{3}{5}\cos\varphi}.$$

Здесь $\frac{3}{5} = \varepsilon$ — эксцентриситет. Поскольку $\varepsilon < 1$, данная кривая — эллипс. В числителе стоит $\frac{16}{5} = p\varepsilon$, где p — параметр, то есть расстояние между фокусом эллипса и соответствующей директрисой. Для эллипса

$$p = \frac{a}{\varepsilon} - c = \frac{a - c\cdot\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{a - (a\cdot\varepsilon)\cdot\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon},$$

откуда

$$p \cdot \varepsilon = a(1-\varepsilon^2) = \frac{16}{5}, \quad a = 5.$$

Соответственно, $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = 4$. Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Изобразим этот эллипс, помня, что полюс совпадает с его левым фокусом, а полярная ось перпендикулярна директрисам. Кроме того, учтем, что $c = a \cdot \varepsilon = 3$ (рис. 18).

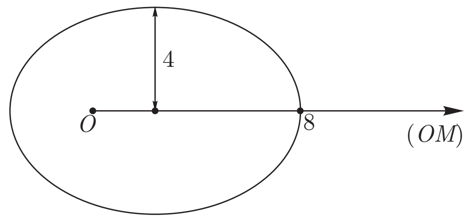

Рис. 18.

б) Изобразить на плоскости множество точек, удовлетворяющих данному уравнению.

Решение.

а) $\rho = \varphi$.

Заметим, что здесь $\varphi \geqslant 0$, потому что $\rho \geqslant 0$. Сравнивая значения ρ при различных φ, получаем кривую, изображенную на рисунке 19.

б) $\rho = a$, $a > 0$.

Если вспомнить, что ρ — это расстояние от точки до полюса, то легко понять, что данная кривая — это окружность с центром в начале координат и радиусом a. Она изображена на рисунке 20.

в) $\rho = a\sin\varphi$, $a > 0$.

Поскольку $\rho \geqslant 0$, данной кривой соответствуют значения $\varphi \in [2\pi n, \pi + 2\pi n]$, причем нам достаточно будет рассмотреть отрезок $[0; \pi]$. Можно заметить, что данная кривая симметрична относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и при данном φ радиус ρ достигает наибольшего значения $\rho = a$. Кроме того, когда φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, радиус ρ возрастает. Впрочем, исследовав данную кривую более строго, можно доказать, что это окружность (см. рис. 21).

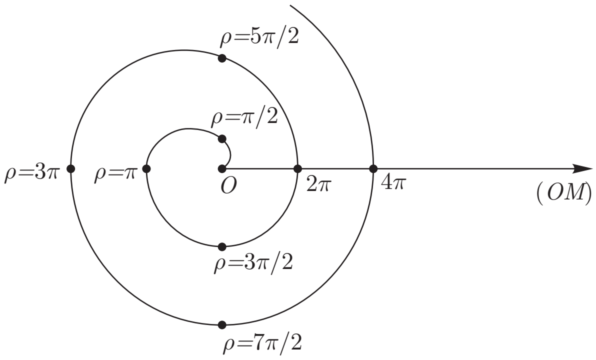

Рис. 19.

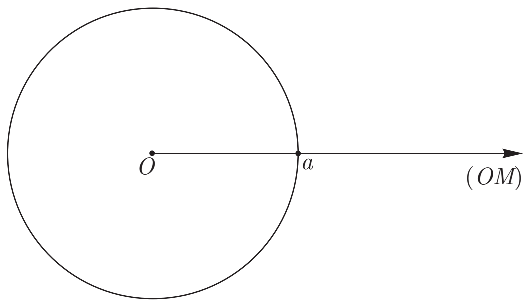

Рис. 20.

г) $\rho = \frac{a}{\cos\varphi}$, $a > 0$.

Если вспомнить, что в декартовой системе координат, у которой начало координат совпадает с полюсом, а положительное направление оси абсцисс — с полярной осью, $x = \rho\cos\varphi$, то легко понять, что нам надо изобразить прямую, перпендикулярную полярной оси. Эта прямая удалена от полюса на расстояние a (см. рис. 22).

д) $\rho = \sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза).

Поскольку $\rho \geqslant 0$, в данном случае $\varphi \in \left[\frac{\pi n}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{3}\right]$, причем нам достаточно будет рассмотреть отрезок $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. При $\varphi = \frac{\pi}{6}$ радиус ρ

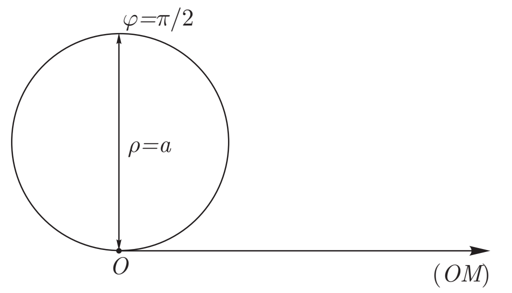

Рис. 21.

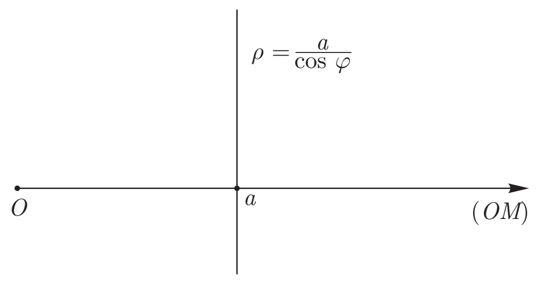

Рис. 22.

достигает наибольшего значения $\rho = 1$. При $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ ρ возрастает, затем — убывает. Луч $\varphi = \frac{\pi}{6}$ служит осью симметрии для данного участка кривой. Примерный вид кривой изображен на рисунке 23.

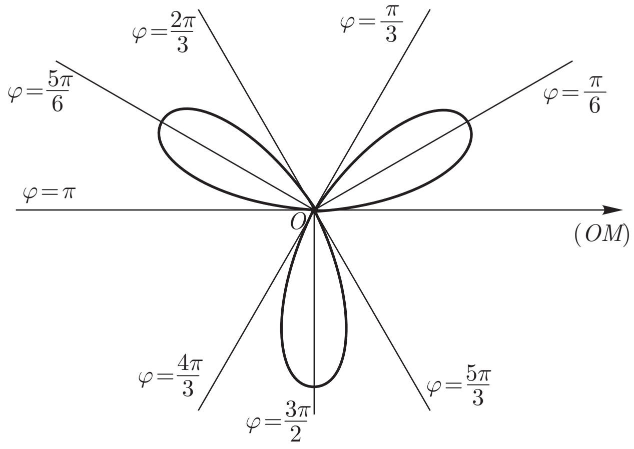
$\varphi = \frac{2\pi}{3}$
$\varphi = \frac{\pi}{3}$
$\varphi = \frac{5\pi}{6}$
$\varphi = \frac{\pi}{6}$
$\varphi = \pi$
O
(OM)
$\varphi = \frac{4\pi}{3}$
$\varphi = \frac{5\pi}{3}$
$\varphi = \frac{3\pi}{2}$

Рис. 23.

Варианты индивидуальных заданий

Работа 1. Комплексные числа

Задание 1. Представить в алгебраической форме.

1. а) i^{231}; $\frac{1}{i^{10}}$ б) $\frac{2-17i}{3}-\frac{2+i}{3+i}$ в) $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$
2. а) i^{170}; i^{-15} б) $\frac{7}{1+\sqrt{6}i}+\sqrt{6}i$ в) $\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}e^{\pi i/2}}\right)^{35}$
3. а) i^{129}; i^{-16} б) $\frac{(3-i)i}{3i-1}$ в) $\left(\frac{\sqrt{3}i-1}{\sqrt{12}i+2}\right)^{49}$
4. а) i^{232}; $\frac{1}{i^{11}}$ б) $\frac{2-i}{i+2}+(i-1)^2$ в) $(2-2i)^7\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$
5. а) i^{121}; $\frac{1}{i^{14}}$ б) $\frac{3+i}{3-i}+\frac{3-i}{3+i}$ в) $(1+i)^{30}\cdot(1-i\sqrt{3})^{15}$
6. а) i^{126}; $\frac{1}{i^{13}}$ б) $\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)}$ в) $\left(-\cos\frac{\pi}{10}-i\sin\frac{\pi}{10}\right)^{15}$
7. а) i^{135}; $\frac{1}{i^{16}}$ б) $\frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$ в) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i-1}\right)^{20}$
8. а) i^{136}; $\frac{1}{i^{15}}$ б) $\frac{(2i+3)^2}{i-1}$ в) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3\cdot\frac{1}{(\sqrt{3}-i)^{17}}$
9. а) i^{181}; $\frac{1}{i^{22}}$ б) $\frac{2+i}{3i-1}+(2i-1)^2$ в) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^6$
10. а) i^{186}; $\frac{1}{i^{21}}$ б) $\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}$ в) $(1-i)^4(\sqrt{3}+i)^6$
11. а) i^{211}; i^{-18} б) $\frac{3-4i}{-i}-\frac{5i}{2-i}$ в) $e^{\frac{\pi i}{2}}\cdot i^8(1+i)^{10}$
12. а) i^{196}; $\frac{1}{i^{19}}$ б) $\frac{(2+3i)(2-3i)}{-i}+1$ в) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33}+(1-i)^{10}$
13. а) i^{200}; i^{-17} б) $\frac{2i-3}{2i+3}-\frac{2i+3}{2i-3}$ в) $\left(ie^{-\frac{\pi i}{3}}\right)^{20}\cdot(-i-1)^{40}$

14. а) i^{146}; i^{-9} б) $\dfrac{(1+i)^3-(1-i)^3}{i}$ в) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$

15. а) i^{143}; i^{-12} б) $(2-i)^2-4-\dfrac{7-i}{2+i}$ в) $\dfrac{(1+i)^{1000}}{(1-i)^{998}}$

16. а) i^{152}; i^{-19} б) $\dfrac{5i}{2+i}+\dfrac{3+4i}{i}$ в) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{-8}$

17. а) i^{201}; i^{-6} б) $\dfrac{18}{\sqrt{5}-2i}$ в) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{-1-i}\right)^{-12}$

18. а) i^{210}; i^{-5} б) $\dfrac{(2+i)^3-(2-i)^3}{(2+i)^2-(2-i)^2}$ в) $\left(\dfrac{\sqrt{3}i+1}{2-2i}\right)^{-4}$

19. а) i^{207}; i^{-8} б) $\dfrac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$ в) $\left(\dfrac{\sqrt{6}i+\sqrt{2}}{2i}\right)^{16}$

20. а) i^{220}; i^{-7} б) $\dfrac{8i}{\sqrt{7}-i}$ в) $\left(\dfrac{-\sqrt{2}i}{1-i}\right)^{80}$

21. а) i^{123}; $\dfrac{1}{i^8}$ б) $\dfrac{3i}{1-\sqrt{2}i}$ в) $(e^{\pi i}(i\sqrt{3}-1))^{20}$

22. а) i^{228}; $\dfrac{1}{i^{17}}$ б) $\dfrac{1+i}{(3i-2)(1-i)}$ в) $\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)^{-21}}{(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)^{-20}}$

23. а) i^{221}; $\dfrac{1}{i^{18}}$ б) $\dfrac{(5+i)(2-i)}{i-1}$ в) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}\right)^{91}$

24. а) i^{154}; i^{-11} б) $\dfrac{9i^2}{2+\sqrt{5}i}$ в) $\left(\dfrac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{-i-\sqrt{3}}\right)^{80}$

25. а) i^{160}; i^{-13} б) $\dfrac{3i-1}{3i+1}+\dfrac{3i+1}{3i-1}$ в) $\left(e^{\frac{-\pi i}{6}}(i\sqrt{3}-1)\right)^{24}$

26. а) i^{163}; i^{-14} б) $\dfrac{1-i}{1-2i}-\dfrac{1-i}{2+i}$ в) $\left(\dfrac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt{3/2}\,i-1/\sqrt{2}}\right)^{40}$

27. а) i^{227}; $\dfrac{1}{i^{12}}$ б) $\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$
в) $\left(\dfrac{i+1}{1-i}\right)^{100}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

28. а) i^{222}; $\dfrac{1}{i^9}$ б) $\dfrac{2+3i}{4}+\dfrac{i-1}{i+1}$

в) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\Big)\cdot(-1+i\sqrt{3})^{60}$

29. а) i^{141}; i^{-10} б) $\dfrac{1+i}{2i+1}-\dfrac{1+i}{2-i}$ в) $\Big(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\Big)i^5(1+\sqrt{3}i)^7$

30. а) i^{199}; $\dfrac{1}{i^{20}}$ б) $\dfrac{(3+4i)(4-3i)+(3-4i)(4+3i)}{i}$ в) $\dfrac{(1+i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^9}$.

Задание 2. Представить в тригонометрической форме и изобразить на плоскости.

1. а) $\sqrt{2}$ б) $-4+4i$ в) $\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$ г) $\sqrt[8]{1}$
2. а) -3 б) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ в) $-\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$ г) $\sqrt[6]{2}$
3. а) $4i$ б) $1-\sqrt{3}i$ в) $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$ г) $\sqrt[5]{-1}$
4. а) $-2i$ б) $\dfrac{i-1}{\sqrt{2}}$ в) $\sin\frac{\pi}{7}-i\cos\frac{\pi}{7}$ г) $\sqrt[4]{-3}$
5. а) $\sqrt{3}+1$ б) $2i-2\sqrt{3}$ в) $-\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}$ г) $\sqrt[5]{i}$
6. а) $-\sqrt{5}$ б) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}-i$ в) $-\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}$ г) $\sqrt[6]{-i}$
7. а) $\sqrt{2}i$ б) $\dfrac{2-2i}{\sqrt{2}}$ в) $-2\Big(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\Big)$ г) $\sqrt[3]{1+i}$
8. а) $-\sqrt{3}i$ б) $1-\dfrac{i}{\sqrt{3}}$ в) $-\Big(\cos\frac{\pi}{9}-i\sin\frac{\pi}{9}\Big)$ г) $\sqrt[3]{-1-i}$
9. а) $\dfrac{1}{10}$ б) $i-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ в) $-3\Big(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\Big)$ г) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$
10. а) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ б) $\sqrt{2}i+\sqrt{2}$ в) $i\Big(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\Big)$ г) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$
11. а) $\dfrac{i}{2}$ б) $\sqrt{2}i+\sqrt{6}$ в) $2i\Big(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\Big)$ г) $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$
12. а) $-\dfrac{i}{\sqrt{3}}$ б) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}$ в) $i\Big(-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\Big)$ г) $\sqrt[4]{1-i}$
13. а) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ б) $\dfrac{-i-1}{3}$ в) $i\Big(\sin\frac{\pi}{7}+i\cos\frac{\pi}{7}\Big)$ г) $\sqrt[4]{i-1}$
14. а) $-\sqrt{3}+1$ б) $-\dfrac{i}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ в) $-i\Big(\sin\frac{\pi}{7}-i\cos\frac{\pi}{7}\Big)$ г) $\sqrt[3]{i-\sqrt{3}}$
15. а) $\dfrac{i}{2\sqrt{2}}$ б) $-\dfrac{1}{3}-\dfrac{i}{\sqrt{3}}$ в) $-2i\Big(\sin\frac{\pi}{9}+i\cos\frac{\pi}{9}\Big)$ г) $\sqrt[3]{-i-\sqrt{3}}$

16. а) $-\dfrac{i}{5}$ б) $-2-2i$ в) $i\Big(-\sin\dfrac{\pi}{9}-i\cos\dfrac{\pi}{9}\Big)$ г) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}}$

17. а) $2-\sqrt{2}$ б) $2\sqrt{3}+2i$ в) $\sin\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ г) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}}$

18. а) $\sqrt{2}-2$ б) $-i+\sqrt{3}$ в) $\cos\dfrac{\pi}{4}-i\cos\dfrac{\pi}{4}$ г) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

19. а) $i\Big(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)$ б) $\dfrac{1+i}{2}$ в) $i\Big(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\cos\dfrac{\pi}{4}\Big)$ г) $\sqrt[3]{\dfrac{i}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

20. а) $i(1-\sqrt{3})$ б) $\dfrac{1-i}{4}$ в) $-i\Big(\sin\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\Big)$ г) $\sqrt[3]{-\dfrac{i}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

21. а) $1-e$ б) $\dfrac{3+3i}{\sqrt{3}}$ в) $-2\Big(\sin\dfrac{\pi}{5}+i\cos\dfrac{\pi}{5}\Big)$ г) $\sqrt[5]{2}$

22. а) $i(\pi-1)$ б) $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ в) $-3\Big(\sin\dfrac{\pi}{5}-i\cos\dfrac{\pi}{5}\Big)$ г) $\sqrt[4]{-3i}$

23. а) $1-2\pi$ б) $2\sqrt{3}i-2$ в) $-\Big(i\cos\dfrac{\pi}{7}-\sin\dfrac{\pi}{7}\Big)$ г) $\sqrt[6]{-1}$

24. а) $\dfrac{i}{1-\sqrt{5}}$ б) $\dfrac{-i-1}{2\sqrt{2}}$ в) $3i\Big(\sin\dfrac{\pi}{7}-i\cos\dfrac{\pi}{7}\Big)$ г) $\sqrt[3]{i-1}$

25. а) $\dfrac{-i}{e-1}$ б) $\sqrt{6}i+\sqrt{2}$ в) $2i\Big(i\cos\dfrac{\pi}{8}-i\sin\dfrac{\pi}{8}\Big)$ г) $\sqrt[4]{1+i}$

26. а) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ б) $-1-\dfrac{i}{\sqrt{3}}$ в) $i\Big(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\cos\dfrac{\pi}{4}\Big)$ г) $\sqrt[3]{\sqrt{3}i+1}$

27. а) $-\pi i$ б) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}-i$ в) $-i\Big(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\Big)$ г) $\sqrt[3]{-1-\sqrt{3}i}$

28. а) $2\pi i$ б) $-3i-3$ в) $-i\Big(\cos\dfrac{\pi}{9}-i\sin\dfrac{\pi}{9}\Big)$ г) $\sqrt[3]{\sqrt{3}i-1}$

29. а) $\dfrac{\pi}{2}$ б) $-\sqrt{3}-i$ в) $-2i\Big(\sin\dfrac{\pi}{9}-i\cos\dfrac{\pi}{9}\Big)$ г) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$

30. а) $\dfrac{4\pi}{3}$ б) $\sqrt{2}i-\sqrt{6}$ в) $\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{6}$ г) $\sqrt[4]{-1-i}$.

Задание 3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенствам.

1. $0<|\operatorname{Re} z|<1$
2. $4>|z+2i|\geqslant 3$
3. $|2z-3|\leqslant 1$
4. $\dfrac{\pi}{4}\leqslant|\arg z|<\dfrac{2\pi}{3}$
5. $|\operatorname{Im}\overline{z}|>2$
6. $|z+2i|=|z|$
7. $|1+z|=|z+i|$
8. $|z+2|>|z|$
9. $|z-1+i|\leqslant 2$
10. $|z-2-3i|>1$
11. $|3z-4|\geqslant 1$
12. $|z+i|=|z-i|$

13. $2 \leqslant |2z+1| \leqslant 4$

14. $1 < |\operatorname{Re} z| < 2$

15. $\operatorname{Im}(\overline{z}) < \frac{1}{2}$

16. $\frac{\pi}{6} < |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{3}$

17. $\arg \overline{z} = \frac{\pi}{4}$

18. $|z-1| = |z+1| = |z+1-2i|$

19. $\frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z+1-i) \leqslant \frac{3\pi}{4}$

20. $\frac{\pi}{3} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{2}$

21. $|z+i| = |z-i| = |z+1|$

22. $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$

23. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1$

24. $|(z-1-2i)^3| = 8$

25. $|(z+3i)^3| = 1$

26. $2 \leqslant |\operatorname{Im} z| \leqslant 4$

27. $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$

28. $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg \operatorname{Im} z \leqslant \frac{\pi}{2}$

29. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} \overline{z} = 1$

30. $\operatorname{Re} \overline{z} + \operatorname{Im} z = 0.$

Задание 4. Решить уравнения.

1. а) $z^2 - 2z + 5 = 0$ б) $z + |z| = 3$
2. а) $z^2 + 2z + 10 = 0$ б) $z^2 = z^{-2}$
3. а) $2z^2 + 2z + 1 = 0$ б) $z + |\overline{z}| = 2$
4. а) $2z^2 - 2z + 5 = 0$ б) $z^2 + |z| = 0$
5. а) $81z^2 + 18z + 2 = 0$ б) $\overline{z} = -4z$
6. а) $4z^2 - 4z + 17 = 0$ б) $\overline{z} = 2 - z$
7. а) $z^2 - 6z + 10 = 0$ б) $\overline{z} = 5\overline{\overline{z}}$
8. а) $z^2 + 6z + 13 = 0$ б) $z^2 + \overline{z} = 0$
9. а) $2z^2 - 6z + 5 = 0$ б) $z^2 + |z|^2 = 0$
10. а) $2z^2 + 6z + 9 = 0$ б) $-\overline{z} - |z| = 3$
11. а) $z^2 + 8z + 17 = 0$ б) $\overline{z}^2 + |z| = 0$
12. а) $z^2 - 8z + 20 = 0$ б) $z \cdot |z| = \overline{z}$
13. а) $z^2 + 4z + 5 = 0$ б) $\overline{z} \cdot |z| = z$
14. а) $z^2 + 4z + 13 = 0$ б) $z + |z| = \overline{z}$
15. а) $z^2 - 4z + 8 = 0$ б) $z - 2|\overline{z}| = \overline{z}$
16. а) $32z^2 - 8z + 1 = 0$ б) $z + |\overline{z}| = -z$
17. а) $32z^2 + 8z + 5 = 0$ б) $z^2 = |z|$
18. а) $8z^2 + 4z + 1 = 0$ б) $-z + |-z| = 1$
19. а) $8z^2 - 4z + 5 = 0$ б) $z^3 = \overline{z}^3$
20. а) $8z^2 + 12z + 5 = 0$ б) $z = |z|^2$
21. а) $z^2 - 2z + 2 = 0$ б) $z \cdot |\overline{z}| = 9$
22. а) $z^2 + 6z + 18 = 0$ б) $\overline{z} \cdot |z| = -4$
23. а) $2z^2 + 2z + 13 = 0$ б) $2z + 3\overline{z} = 10$
24. а) $2z^2 - 6z + 17 = 0$ б) $\overline{z} - 2z = 3i$
25. а) $z^2 - 8z + 25 = 0$ б) $z \cdot \overline{z} = 2z^2$
26. а) $8z^2 + 4z = 13 = 0$ б) $z \cdot \overline{z} = -z^2$

27.	а) $8z^2 - 12z + 9 = 0$	б) $\lvert z\rvert \cdot z = -i$
28.	а) $8z^2 + 12z + 17 = 0$	б) $\lvert\overline{z}\rvert \cdot z = 4i$
29.	а) $9z^2 + 6z + 2 = 0$	б) $\overline{z} + 2\lvert z\rvert = 3$
30.	а) $9z^2 - 6z + 5 = 0$	б) $2z - \lvert\overline{z}\rvert = 2.$

Задание 5. Записать круговые многочлены $X_n(t)$. (В вариантах 22–30 представить ответ в виде частного двух многочленов.)

1) $X_{12}(t)$	11) $X_{16}(t)$	21) $X_{169}(t)$
2) $X_{20}(t)$	12) $X_{32}(t)$	22) $X_{30}(t)$
3) $X_{28}(t)$	13) $X_{35}(t)$	23) $X_{42}(t)$
4) $X_{44}(t)$	14) $X_{55}(t)$	24) $X_{66}(t)$
5) $X_{18}(t)$	15) $X_{65}(t)$	25) $X_{78}(t)$
6) $X_{45}(t)$	16) $X_{77}(t)$	26) $X_{105}(t)$
7) $X_{50}(t)$	17) $X_{91}(t)$	27) $X_{165}(t)$
8) $X_{75}(t)$	18) $X_{49}(t)$	28) $X_{195}(t)$
9) $X_{27}(t)$	19) $X_{81}(t)$	29) $X_{70}(t)$
10) $X_{125}(t)$	20) $X_{121}(t)$	30) $X_{110}(t)$

Работа 2. Целые числа

Задание 1. Разложить данное число на простые множители.

1) 3360	5) 12600	9) 17010
2) 5040	6) 17640	10) 11340
3) 8400	7) 29400	11) 28350
4) 11760	8) 44100	12) 39690

13) 18900	19) 183750	25) 110250
14) 26460	20) 157500	26) 144060
15) 66150	21) 367500	27) 216090
16) 131250	22) 551250	28) 360150
17) 52500	23) 31500	29) 61740
18) 78750	24) 73500	30) 102900

Задание 2.

а) Найти наибольший общий делитель чисел a и b с помощью алгоритма Евклида. Записать линейное представление $d = \text{НОД}(a, b)$ в виде

$$d = a \cdot v + b \cdot v,$$

где $u, v \in \mathbb{Z}$.

б) Решить диофантово уравнение

$$ax + by = c.$$

1) $a = 747, b = 37, c = 3$	13) $a = 1255, b = 69, c = 5$
2) $a = 843, b = 44, c = 3$	14) $a = 1407, b = 82, c = 5$
3) $a = 1037, b = 57, c = 3$	15) $a = 1765, b = 109, c = 5$
4) $a = 1167, b = 68, c = 3$	16) $a = 1971, b = 130, c = 4$
5) $a = 1247, b = 77, c = 3$	17) $a = 2115, b = 149, c = 4$
6) $a = 1395, b = 92, c = 2$	18) $a = 2343, b = 178, c = 4$
7) $a = 752, b = 53, c = 2$	19) $a = 902, b = 74, c = 4$
8) $a = 829, b = 63, c = 2$	20) $a = 982, b = 88, c = 4$
9) $a = 1012, b = 83, c = 2$	21) $a = 2302, b = 114, c = 6$
10) $a = 1105, b = 99, c = 2$	22) $a = 2606, b = 136, c = 6$
11) $a = 2282, b = 113, c = 5$	23) $a = 2802, b = 154, c = 6$
12) $a = 2587, b = 135, c = 5$	24) $a = 3158, b = 184, c = 6$

25) $a = 1716, b = 106, c = 6$

26) $a = 1910, b = 126, c = 8$

27) $a = 2356, b = 166, c = 8$

28) $a = 2606, b = 198, c = 8$

29) $a = 2756, b = 226, c = 8$

30) $a = 3014, b = 270, c = 8$

Задание 3. Составить таблицу значений многочлена $f(x)$ в поле $\mathbb{Z}_7$. Указать корни этого многочлена в $\mathbb{Z}_7$.

1) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$
2) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 2$
3) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 3$
4) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 4$
5) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 1$
6) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 2$
7) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 3$
8) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 4$
9) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 1$
10) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 2$
11) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 3$
12) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 4$
13) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 4x + 1$
14) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 4x + 2$
15) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 4x + 3$
16) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 4x + 4$
17) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x + 1$
18) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x + 2$
19) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x + 3$
20) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x + 4$
21) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 4x + 1$
22) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 4x + 2$
23) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 4x + 3$
24) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 4x + 4$
25) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + x + 1$
26) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + x + 2$
27) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + x + 3$
28) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + x + 4$
29) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 4x + 1$
30) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 4x + 2$

Задание 4. Решить сравнение. Ответ представить как множество классов вычетов в соответствующем $\mathbb{Z}_m$. Записать десять любых целых чисел, служащих решениями данного сравнения.

1) $15x \equiv 70 \pmod{55}$
2) $15x \equiv 80 \pmod{65}$
3) $20x \equiv 125 \pmod{55}$
4) $20x \equiv 145 \pmod{65}$
5) $25x \equiv 65 \pmod{55}$
6) $25x \equiv 75 \pmod{65}$
7) $30x \equiv 120 \pmod{55}$
8) $30x \equiv 140 \pmod{65}$
9) $10x \equiv 90 \pmod{35}$
10) $25x \equiv 110 \pmod{45}$
11) $15x \equiv 125 \pmod{35}$
12) $30x \equiv 155 \pmod{45}$
13) $20x \equiv 95 \pmod{35}$
14) $10x \equiv 115 \pmod{45}$
15) $25x \equiv 130 \pmod{35}$
16) $35x \equiv 160 \pmod{45}$
17) $14x \equiv 84 \pmod{63}$
18) $21x \equiv 98 \pmod{77}$
19) $28x \equiv 147 \pmod{63}$
20) $21x \equiv 175 \pmod{77}$
21) $28x \equiv 77 \pmod{63}$
22) $35x \equiv 91 \pmod{77}$
23) $35x \equiv 140 \pmod{63}$
24) $49x \equiv 168 \pmod{77}$
25) $14x \equiv 77 \pmod{49}$
26) $21x \equiv 98 \pmod{70}$
27) $21x \equiv 126 \pmod{49}$
28) $49x \equiv 168 \pmod{70}$
29) $28x \equiv 63 \pmod{49}$
30) $21x \equiv 84 \pmod{70}$

Работа 3. Многочлены

Задание 1. Используя определение кратного корня, перечислить все корни многочлена $f(x)$ и указать их кратность.

1) $f(x) = (x-1)^5(x+1)^4(x-2)$
2) $f(x) = (x-1)^5(x+1)^3(x-2)^2$
3) $f(x) = (x-1)^5(x+1)^2(x-2)^3$
4) $f(x) = (x-1)^4(x+1)^5(x-2)$
5) $f(x) = (x-1)^3(x+1)^5(x-2)^2$
6) $f(x) = (x-1)^2(x+1)^5(x-2)^3$
7) $f(x) = (x-1)^3(x+1)^3(x-2)^3$
8) $f(x) = (x-1)(x+1)^4(x-2)^5$
9) $f(x) = (x-1)^2(x+1)^3(x-2)^5$
10) $f(x) = (x-1)^3(x+1)^2(x-2)^5$
11) $f(x) = x^5(x+2)^4(x-3)$
12) $f(x) = x^5(x+2)^3(x-3)^2$

13) $f(x) = x^5(x+2)^2(x-3)^3$

14) $f(x) = x^4(x+2)^5(x-3)$

15) $f(x) = x^3(x+2)^5(x-3)^2$

16) $f(x) = x^2(x+2)^5(x-3)^3$

17) $f(x) = x^3(x+2)^3(x-3)^3$

18) $f(x) = x(x+2)^4(x-3)^5$

19) $f(x) = x^2(x+2)^3(x-3)^5$

20) $f(x) = x^3(x+2)^2(x-3)^5$

21) $f(x) = (x+1)^5x^4(x+3)$

22) $f(x) = (x+1)^5x^3(x+3)^2$

23) $f(x) = (x+1)^5x^2(x+3)^3$

24) $f(x) = (x+1)^4x^5(x+3)$

25) $f(x) = (x+1)^3x^5(x+3)^2$

26) $f(x) = (x+1)^2x^5(x+3)^3$

27) $f(x) = (x+1)^3x^3(x+3)^3$

28) $f(x) = (x+1)x^4(x+3)^5$

29) $f(x) = (x+1)^2x^3(x+3)^5$

30) $f(x) = (x+1)^3x^2(x+3)^5$

Задание 2. Найти кратность корня.

1. $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$ $\quad x_0 = i - 2$
2. $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$ $\quad x_0 = 1 - 2i$
3. $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$ $\quad x_0 = -i$
4. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 10x + 25 = 0$ $\quad x_0 = 2 - i$
5. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 10x + 25 = 0$ $\quad x_0 = 2i - 1$
6. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 10x + 25 = 0$ $\quad x_0 = i$
7. $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 = 0$ $\quad x_0 = i$
8. $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 = 0$ $\quad x_0 = 1 - 2i$
9. $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 = 0$ $\quad x_0 = i + 1$
10. $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 2x + 5 = 0$ $\quad x_0 = -i$
11. $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 2x + 5 = 0$ $\quad x_0 = 2i - 1$
12. $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 2x + 5 = 0$ $\quad x_0 = i - 1$
13. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0$ $\quad x_0 = i$
14. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0$ $\quad x_0 = i - 2$
15. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0$ $\quad x_0 = 2i - 1$
16. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$ $\quad x_0 = -i$
17. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$ $\quad x_0 = 2 - i$
18. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$ $\quad x_0 = 2i + 1$
19. $x^4 + 8x^3 + 26x^2 + 40x + 25 = 0$ $\quad x_0 = i - 2$
20. $x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25 = 0$ $\quad x_0 = 2 - i$
21. $x^4 + 8x^3 + 26x^2 + 40x + 25 = 0$ $\quad x_0 = i - 1$
22. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 20x + 25 = 0$ $\quad x_0 = 1 - 2i$
23. $x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 20x + 25 = 0$ $\quad x_0 = 2i - 1$

24.	$x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 25 = 0$	$x_0 = -1 - i$
25.	$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8 = 0$	$x_0 = 2i$
26.	$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8 = 0$	$x_0 = 1 - i$
27.	$x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + 8 = 0$	$x_0 = -2i$
28.	$x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + 8 = 0$	$x_0 = -i - 1$
29.	$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$	$x_0 = 1 - i$
30.	$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 = 0$	$x_0 = i - 1.$

Задание 3. Разложить многочлен на линейные множители.

1.	$x^6 - 1$	2.	$x^6 + 1$
3.	$x^4 - 1$	4.	$x^4 + 1$
5.	$x^4 - x^2 - 6$	6.	$x^4 + x^2 - 6$
7.	$x^4 - x^2 - 2$	8.	$x^4 + x^2 - 2$
9.	$x^4 - 2x^2 - 3$	10.	$x^4 + 2x^2 - 3$
11.	$x^4 - 3x^2 - 4$	12.	$x^4 + 3x^2 - 4$
13.	$x^4 - 2x^2 - 8$	14.	$x^4 + 2x^2 - 8$
15.	$x^4 - x^2 - 12$	16.	$x^4 + x^2 - 12$
17.	$x^4 + 2x^2 + 1$	18.	$x^4 + 4x^2 + 4$
19.	$x^4 + 6x^2 + 9$	20.	$x^4 + 8x^2 + 16$
21.	$x^4 + 5x^2 + 6$	22.	$x^4 + 3x^2 + 2$
23.	$x^4 + 4x^2 + 3$	24.	$x^4 + 5x^2 + 4$
25.	$x^4 + 6x^2 + 8$	26.	$x^4 + 7x^2 + 12$
27.	$x^6 + x^4$	28.	$x^5 + 2x^3 + x$
29.	$x^5 + 4x^3 + 4x$	30.	$x^5 - 6x^3 + 9x.$

Задание 4. Построить многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами по данным корням. (В скобках указана кратность корня.)

1.	$2(2),\ 1 + i,\ 2 - i$	2.	$1 + i(2),\ 2 + i$
3.	$1 - i(3)$	4.	$2 - i(2),\ 1 - i,\ 1 + i$
5.	$2 + i(2),\ 1(2)$	6.	$1 - i(2),\ 2(2)$
7.	$1 - 2i,\ 1 + 2i,\ 3 - i(2)$	8.	$3 - i,\ 1 + 2i(2)$
9.	$3 - i(3)$	10.	$3 - i(2),\ 3 + i,\ 1(2)$
11.	$2i + 1(2),\ 1(2)$	12.	$2i + 1,\ i + 3,\ 2(2)$
13.	$2i + 1,\ 2i - 1,\ -1(2)$	14.	$i + 3,\ i - 3(2)$
15.	$2i - 1,\ i - 3,\ -2(2)$	16.	$2i - 1(3)$
17.	$1 + 2i,\ i - 3(2)$	18.	$1,\ -2,\ i + 2,\ i - 2$
19.	$i + 1,\ i - 1(2)$	20.	$i - 2,\ i + 2(2)$
21.	$1 + 3i,\ 1 - i,\ 1(2)$	22.	$1 - 2i,\ 1 - i(2)$

23. $1+3i(2),\ 1+i$
24. $1-3i(3)$
25. $1+i(3)$
26. $\frac{i}{2}(2),\ \frac{-i}{2},\ 1,\ -1$
27. $\frac{1}{2}(2),\ -\frac{1}{2},\ 1+\sqrt{3}i$
28. $1-\sqrt{3}i(2),\ 1(3)$
29. $\frac{i}{3}(2),\ 3i-1$
30. $3i+1,\ \sqrt{3}i-1(2)$.

Задание 5. Выяснить, приводим ли данный многочлен над полем $\mathbb{C}$ и над полем $\mathbb{R}$.

1) $f(x)=x^2+x+1$
2) $f(x)=x^2-x+1$
3) $f(x)=x^2+x-1$
4) $f(x)=x^2-x-1$
5) $f(x)=x^2+2x+1$
6) $f(x)=x^2-2x+1$
7) $f(x)=x^2+2x-1$
8) $f(x)=x^2-2x-1$
9) $f(x)=x^2+x+2$
10) $f(x)=x^2-x+2$
11) $f(x)=x^2+x-2$
12) $f(x)=x^2-x-2$
13) $f(x)=x^2+2x+2$
14) $f(x)=x^2-2x+2$
15) $f(x)=x^2+2x-2$
16) $f(x)=x^2-2x-2$
17) $f(x)=x^2+3x+1$
18) $f(x)=x^2-3x+1$
19) $f(x)=x^2+3x-1$
20) $f(x)=x^2-3x-1$
21) $f(x)=x^2+x+3$
22) $f(x)=x^2-x+3$
23) $f(x)=x^2+x-3$
24) $f(x)=x^2-x-3$
25) $f(x)=x^2+3x+2$
26) $f(x)=x^2-3x+2$
27) $f(x)=x^2+3x-2$
28) $f(x)=x^2-3x-2$
29) $f(x)=x^2+2x+3$
30) $f(x)=x^2-2x+3$

Задание 6. Используя критерий Эйзенштейна, выяснить, приводим ли данный многочлен над полем $\mathbb{Q}$.

1) $f(x)=x^5+10x^4-5x^3-20x^2+30x+15$
2) $f(x)=x^5+10x^4-5x^3-20x^2+40x-10$

3) $f(x) = x^5 - 10x^4 + 5x^3 - 15x^2 - 30x + 10$

4) $f(x) = x^5 - 10x^4 + 5x^3 - 15x^2 - 40x - 15$

5) $f(x) = x^5 + 10x^4 + 15x^3 - 25x^2 + 20x + 15$

6) $f(x) = x^5 + 10x^4 - 15x^3 - 25x^2 + 5x - 10$

7) $f(x) = x^5 - 10x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 25x + 10$

8) $f(x) = x^5 - 10x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 25x - 15$

9) $f(x) = x^5 + 15x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 5x - 5$

10) $f(x) = x^5 + 15x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 25x + 5$

11) $f(x) = x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 5x^2 - 20x + 35$

12) $f(x) = x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 20x - 35$

13) $f(x) = x^5 + 25x^4 + 15x^3 - 5x^2 + 10x + 45$

14) $f(x) = x^5 + 25x^4 - 15x^3 - 5x^2 - 10x - 45$

15) $f(x) = x^5 - 25x^4 + 25x^3 + 5x^2 + 15x + 55$

16) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 14x^3 - 56x^2 + 21x + 28$

17) $f(x) = x^5 - 7x^4 - 21x^3 + 49x^2 + 14x + 56$

18) $f(x) = x^5 + 14x^4 + 28x^3 - 42x^2 - 7x + 21$

19) $f(x) = x^5 - 14x^4 - 35x^3 + 35x^2 + 28x - 7$

20) $f(x) = x^5 + 21x^4 + 42x^3 - 28x^2 - 35x + 56$

21) $f(x) = x^5 - 21x^4 - 49x^3 + 21x^2 + 35x + 28$

22) $f(x) = x^5 + 28x^4 + 56x^3 - 14x^2 + 7x - 35$

23) $f(x) = x^5 - 28x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 35x + 21$

24) $f(x) = x^5 + 35x^4 + 14x^3 - 7x^2 + 21x - 28$

25) $f(x) = x^5 - 35x^4 - 21x^3 + 14x^2 + 28x + 7$

26) $f(x) = x^5 + 42x^4 + 28x^3 - 21x^2 - 35x - 7$

27) $f(x) = x^5 - 42x^4 - 35x^3 + 28x^2 + 7x + 14$

28) $f(x) = x^5 + 49x^4 + 42x^3 - 35x^2 + 21x - 14$

29) $f(x) = x^5 - 49x^4 - 49x^3 + 42x^2 - 28x + 21$

30) $f(x) = x^5 + 56x^4 + 7x^3 - 49x^2 + 14x - 28$

Задание 7. С помощью теоремы Штурма отделить корни данного многочлена.

1) $f(x) = x^3 - 3x - 1$

2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$

3) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

4) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$

5) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

6) $f(x) = x^3 - x + 5$

7) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 5$

8) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$

9) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 11$

10) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 1$

11) $f(x) = x^3 + 3x - 5$

12) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 1$

13) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 9$

14) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 9$

15) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 19$

16) $f(x) = x^4 - x - 1$

17) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1$

18) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 1$

19) $f(x) = x^4 + x^2 - 1$

20) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 1$

21) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

22) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 12x + 9$

23) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 4x + 2$

24) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 4x + 18$

25) $f(x) = x^4 - 12x^2 - 16x - 4$

26) $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1$

27) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$

28) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 1$

29) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$

30) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

Задание 8. Найти наибольший общий делитель данных многочленов с помощью алгоритма Евклида.

1. $2x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$
и $4x^6 + 6x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$
2. $2x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 5x - 4$
и $4x^6 - 9x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 2x + 5$
3. $2x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 18x^2 - 15x - 21$
и $4x^6 - 34x^4 + 3x^3 + 17x^2 + 3x + 55$
4. $2x^5 + 4x^4 - 27x^3 - 52x^2 - 29x - 56$
и $4x^6 - 69x^4 + 4x^3 + 136x^2 + 4x + 209$
5. $2x^5 + 5x^4 - 45x^3 - 110x^2 - 47x - 115$
и $4x^6 - 114x^4 + 5x^3 + 433x^2 + 5x + 551$
6. $2x^5 + 6x^4 - 67x^3 - 198x^2 - 69x - 204$
и $4x^6 - 169x^4 + 6x^3 + 1016x^2 + 6x + 1189$
7. $2x^5 + 7x^4 - 93x^3 - 322x^2 - 95x - 329$
и $4x^6 - 234x^4 + 7x^3 + 2017x^2 + 7x + 2255$
8. $2x^5 + 8x^4 - 123x^3 - 488x^2 - 125x - 496$
и $4x^6 - 309x^4 + 8x^3 + 3592x^2 + 8x + 3905$
9. $2x^5 + 9x^4 - 157x^3 - 702x^2 - 159x - 711$
и $4x^6 - 394x^4 + 9x^3 + 5921x^2 + 9x + 6319$
10. $2x^5 + 10x^4 - 195x^3 - 970x^2 - 197x - 980$
и $4x^6 - 489x^4 + 10x^3 + 9208x^2 + 10x + 9701$
11. $12x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 5x + 1$
и $12x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$

12. $12x^4 + 20x^3 - 11x^2 - 23x + 8$
и $12x^5 - 4x^4 - 39x^3 - 5x^2 + 45x - 13$
13. $12x^4 + 32x^3 - 30x^2 - 75x + 27$
и $12x^5 - 4x^4 - 114x^3 + 11x^2 + 228x - 73$
14. $12x^4 + 44x^3 - 55x^2 - 179x + 64$
и $12x^5 - 4x^4 - 219x^3 + 37x^2 + 735x - 241$
15. $12x^4 + 56x^3 - 86x^2 - 353x + 125$
и $12x^5 - 4x^4 - 354x^3 + 73x^2 + 1818x - 601$
16. $12x^4 + 68x^3 - 123x^2 - 615x + 216$
и $12x^5 - 4x^4 - 519x^3 + 119x^2 + 3801x - 1261$
17. $12x^4 + 80x^3 - 166x^2 - 983x + 343$
и $12x^5 - 4x^4 - 714x^3 + 175x^2 + 7080x - 2353$
18. $12x^4 + 92x^3 - 215x^2 - 1475x + 512$
и $12x^5 - 4x^4 - 939x^3 + 241x^2 + 12123x - 4033$
19. $12x^4 + 104x^3 - 270x^2 - 2109x + 729$
и $12x^5 - 4x^4 - 1194x^3 + 317x^2 + 19470x - 6481$
20. $12x^4 + 116x^3 - 331x^2 - 2903x + 1000$
и $12x^5 - 4x^4 - 1479x^3 + 403x^2 + 29733x - 9901$
21. $-2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 5x - 2$
и $-4x^5 - 8x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 3x + 2$
22. $-2x^4 - 2x^3 + 13x^2 + 10x - 16$
и $-4x^5 - 8x^4 + 21x^3 + 44x^2 - 7x - 22$
23. $-2x^4 - x^3 + 25x^2 + 11x - 54$
и $-4x^5 - 8x^4 + 46x^3 + 95x^2 - 65x - 142$
24. $-2x^4 + 41x^2 + 2x - 128$
и $-4x^5 - 8x^4 + 81x^3 + 166x^2 - 231x - 478$
25. $-2x^4 + x^3 + 61x^2 - 23x - 250$
и $-4x^5 - 8x^4 + 126x^3 + 257x^2 - 589x - 1198$
26. $-2x^4 + 2x^3 + 85x^2 - 70x - 432$
и $-4x^5 - 8x^4 + 181x^3 + 368x^2 - 1247x - 2518$
27. $-2x^4 + 3x^3 + 113x^2 - 145x - 686$
и $-4x^5 - 8x^4 + 246x^3 + 499x^2 - 2337x - 4702$
28. $-2x^4 + 4x^3 + 145x^2 - 254x - 1024$
и $-4x^5 - 8x^4 + 321x^3 + 650x^2 - 4015x - 8062$
29. $-2x^4 + 5x^3 + 181x^2 - 403x - 1458$
и $-4x^5 - 8x^4 + 406x^3 + 821x^2 - 6461x - 12958$
30. $-2x^4 + 6x^3 + 221x^2 - 598x - 2000$
и $-4x^5 - 8x^4 + 501x^3 + 1012x^2 - 9879x - 19798$.

Работа 4. Алгебраические структуры

Задание 1. Выяснить, является ли данное множество полугруппой, моноидом, группой относительно данной бинарной операции.

1) $\mathbb{Z}_3$ относительно операции $a * b = 2a + b$.
2) $\mathbb{Z}_4$ относительно вычитания.
3) $\mathbb{Z}_5$ относительно операции $a * b = 2a + 2b$.
4) $\mathbb{Z}_6$ относительно операции $a * b = a + 3b$.
5) $\mathbb{Z}_7$ относительно сложения.
6) $\mathbb{Z}$ относительно операции $a * b = a^b$.
7) $\mathbb{Z}_4$ относительно умножения.
8) $\mathbb{Z}_5$ относительно операции $a * b = a^2 b$.
9) $\mathbb{Z}_6$ относительно умножения.
10) $\mathbb{Z}_7^*$ относительно умножения.
11) $\mathbb{Z}_6^*$ относительно сложения.
12) $\mathbb{Z}_8^*$ относительно умножения.
13) Множество всех чисел вида $3n + 1$, где $n \in \mathbb{Z}$, относительно умножения.
14) Множество всех чисел вида $3n + 1$, где $n \in \mathbb{Z}$, относительно сложения.
15) Множество всех чисел, кратных пяти, относительно сложения.
16) Множество всех четных чисел относительно умножения.
17) Множество всех нечетных чисел относительно умножения.
18) Множество всех чисел, дающих при делении на 5 в остатке 1 или 4, относительно умножения.
19) Множество простых чисел относительно сложения.
20) Множество простых чисел относительно умножения.
21) Множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, относительно умножения.
22) Множество чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, относительно сложения.

23) Множество чисел вида $a + b\sqrt{5}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, относительно сложения.

24) Множество чисел вида $a + b\sqrt[3]{2}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, относительно сложения.

25) Множество чисел вида $a + b\sqrt[3]{2}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, относительно умножения.

26) Множество чисел вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[4]{4}$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, относительно умножения.

27) Множество многочленов первой степени относительно сложения.

28) Множество многочленов первой степени относительно умножения.

29) Множество многочленов не более чем первой степени относительно сложения.

30) Множество многочленов не более чем первой степени относительно умножения.

Задание 2. Выяснить, будет ли данное бинарное отношение, заданное на множестве действительных чисел, отношением порядка (варианты 1–15) или отношением эквивалентности (варианты 16–30).

1) $x \leqslant 2y$
2) $x \leqslant -3y$
3) $-x \leqslant 5y$
4) $-x < 4y$
5) $x < 5y$
6) $x < -3y$
7) $-|x| \geqslant 2y$
8) $|x| \geqslant -3y$
9) $|x| \geqslant 2y$
10) $|x| > \frac{1}{2}y$
11) $|x| < 0.25y$
12) $x \leqslant y + 1$
13) $x \geqslant y - 1$
14) $x < y - 2$
15) $x > y + 3$
16) $2x = y$
17) $x = -2y$
18) $3x = -y$
19) $x = 3y$
20) $-3x = 2y^2$
21) $x^2 = -y$
22) $|x| = y$

23) $|x| = -y$

24) $2|x| = y$

25) $x = -3|y|$

26) $x = 5|y|$

27) $|x| = |y|$

28) $|x| = -|y|$

29) $x = y^3$

30) $x = \sqrt{y}$

Работа 5. Линейная алгебра

Задание 1.

а) Вычислить данный определитель, разложив его по какой-либо строке (или столбцу).

б) Вычислить этот же определитель методом Гаусса (приведением к треугольному виду).

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & -8 & 3 & -1 \\ 8 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & -1 \\ -1 & 8 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 & -5 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

11) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

12) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

13) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ 14) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

15) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 16) $\begin{vmatrix} 0 & 18 & 21 & 17 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

17) $\begin{vmatrix} 0 & 17 & 14 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 18) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 17 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & -1 \\ 0 & 3 & 19 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

19) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 9 & 0 & 15 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 20) $\begin{vmatrix} 20 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 19 & 0 & -3 & 1 \\ 18 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

21) $\begin{vmatrix} 25 & 0 & 17 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 22) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 50 & 0 & -21 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

23) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 0 & -14 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 24) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 31 & 29 & 0 & 14 \end{vmatrix}$

25) $\begin{vmatrix} 9 & 11 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 26) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

27) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 18 & 13 & 15 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 28) $\begin{vmatrix} -15 & 16 & 13 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

29) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 18 & 0 \end{vmatrix}$ 30) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Задание 2.

а) Решить данное уравнение с помощью обратной матрицы. (Обратную матрицу найти методом элементарных преобразований.)

б) Переписать данное уравнение в виде системы линейных уравнений. Решить его методом Крамера. Сравнить ответы.

1. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T = (1,\, -4,\, 5)$

2. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}^T$

3. $\left(X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X^T = (-1,\, 6,\, -5)^T$

6. $\left(\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X \right)^T = (-1,\, 3,\, 4)$

7. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}^T = (1,\, 8,\, -1)$

8. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}^T$

9. $\left(X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X^T = (1,\, -7,\, 5)^T$

12. $\left(\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot X\right)^T = (-4,\,-1,\,0)$

13. $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}^T = (2,\,0,\,6)$

14. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 5 & -1 & 3\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}3\\ -5\\ 4\end{pmatrix}^T$

15. $\left(X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 5 & 1 & -4\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix}-1\\ 7\\ 0\end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix}2 & -3 & 3\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot X^T = \begin{pmatrix}0\\ -7\\ 3\end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X^T = (3,\,-4,\,4)^T$

18. $\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}\cdot X\right)^T = (1,\,0,\,7)$

19. $X\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 6\end{pmatrix}^T = (3,\,4,\,0)$

20. $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 3 & 1 & -3\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0\\ -1\\ 3\end{pmatrix}^T$

21. $\left(X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -3 & 2 & 5\end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix}0\\ -1\\ -2\end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 1 & 5\\ 1 & -4 & -3\end{pmatrix}\cdot X^T = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X^T = (-5,\, 2,\, -4)^T$

24. $\left(\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X\right)^T = (-5,\, -3,\, -1)$

25. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T = (2,\, 0,\, -5)$

26. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}^T$

27. $\left(X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X^T = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot X^T = (1,\, 8,\, 0)^T$

30. $\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X\right)^T = (1,\, -9,\, 4).$

Задание 3.

а) Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств, натянутых на данные системы векторов.

б) Найти базис ортогонального дополнения к сумме P и Q.

1. $P\colon \langle (2,\, 1,\, 3,\, 7);\, (3,\, -2,\, 1,\, 0)\rangle$
   $Q\colon \langle (1,\, -3,\, -4,\, 7);\, (4,\, -5,\, -5,\, -7)\rangle$
2. $P\colon \langle (5,\, 3,\, 1,\, 3);\, (-2,\, -1,\, 2,\, 0);\, (1,\, 1,\, -3,\, 3)\rangle$
   $Q\colon \langle (3,\, 4,\, 5,\, 4);\, (-2,\, 1,\, 4,\, 1)\rangle$
3. $P\colon \langle (1,\, 3,\, 5,\, -7);\, (-1,\, 2,\, 4,\, -4)\rangle$
   $Q\colon \langle (-2,\, -1,\, -1,\, 3);\, (4,\, -2,\, 4,\, -1);\, (0;\, -2;\, 1;\, 2,5)\rangle$
4. $P\colon \langle (3,\, 1,\, 6,\, 3);\, (-2,\, 2,\, -3,\, 0);\, (-4,\, 5,\, -1,\, 1)\rangle$

$Q\colon \langle(2,\ 6,\ 6,\ 6)\rangle$

5. $P\colon \langle(4,\ 1,\ 4,\ -3);\ (-2,\ -1,\ 1,\ -2);\ (3,\ 1,\ 5,\ 1)\rangle$
   $Q\colon \langle(-1,\ -1,\ 3,\ 5)\rangle$
6. $P\colon \langle(1,\ 2,\ 5,\ 3);\ (2,\ -3,\ 4,\ 0)\rangle$
   $Q\colon \langle(1,\ -1,\ -2,\ 1);\ (2,\ 0,\ 3,\ 4)\rangle$
7. $P\colon \langle(5,\ 1,\ 2,\ -3);\ (3,\ 4,\ -1,\ 5);\ (-1,\ -7,\ 4,\ -13)\rangle$
   $Q\colon \langle(2,\ 4,\ 8,\ -6);\ (1,\ -1,\ -2,\ 1)\rangle$
8. $P\colon \langle(-2,\ 4,\ 10,\ 3);\ (-4,\ 3,\ 5,\ -1)\rangle$
   $Q\colon \langle(2,\ 1,\ 5,\ 4);\ (1,\ -1,\ -4,\ -3);\ (0,\ 3,\ 13,\ 10)\rangle$
9. $P\colon \langle(3,\ 1,\ 4,\ 7);\ (-4,\ 2,\ 3,\ -1);\ (2,\ -1,\ -2,\ 0)\rangle$
   $Q\colon \langle(-1,\ 3,\ 7,\ 6);\ (1,\ 2,\ 6,\ 7)\rangle$
10. $P\colon \langle(6,\ 2,\ -1,\ -1)\rangle$
    $Q\colon \langle(1,\ 4,\ 2,\ -3);\ (5,\ -2,\ -3,\ 2);\ (-2,\ -1,\ 1,\ 4)\rangle$
11. $P\colon \langle(1,\ 1,\ -3,\ 0);\ (3,\ 2,\ 2,\ -1)\rangle$
    $Q\colon \langle(2,\ 0,\ 2,\ -2);\ (4,\ 1,\ 7,\ -3)\rangle$
12. $P\colon \langle(2,\ 3,\ 1,\ 1);\ (1,\ 1,\ -4,\ 0)\rangle$
    $Q\colon \langle(2,\ 2,\ -4,\ 0);\ (3,\ 4,\ 1,\ 1)\rangle$
13. $P\colon \langle(3,\ -2,\ -1,\ -5);\ (1,\ 3,\ 2,\ 2);\ (5,\ -2,\ 4,\ -7)\rangle$
    $Q\colon \langle(6,\ 1,\ 6,\ -5);\ (-4,\ 5,\ -2,\ 9)\rangle$
14. $P\colon \langle(1,\ -4,\ 2,\ -5);\ (4,\ 1,\ -3,\ -3);\ (2,\ 3,\ 4,\ 1)\rangle$
    $Q\colon \langle(5,\ -3,\ -1,\ -8);\ (3,\ 5,\ -5,\ 2)\rangle$
15. $P\colon \langle(2,\ 4,\ -3,\ 2);\ (1,\ 1,\ 2,\ 0)\rangle$
    $Q\colon \langle(1,\ 3,\ -5,\ 2);\ (4,\ 6,\ 1,\ 2);\ (3,\ -2,\ 1,\ -5)\rangle$
16. $P\colon \langle(1,\ 2,\ -3,\ 1);\ (2,\ -3,\ -1,\ 7)\rangle$
    $Q\colon \langle(3,\ -1,\ -4,\ 8);\ (4,\ 1,\ -2,\ 0)\rangle$
17. $P\colon \langle(3,\ -1,\ 4,\ 2);\ (1,\ 2,\ 3,\ 7)\rangle$
    $Q\colon \langle(5,\ 3,\ 2,\ 8);\ (2,\ -3,\ 1,\ -5)\rangle$
18. $P\colon \langle(3,\ -3,\ 2,\ -4);\ (2,\ 1,\ -3,\ -1);\ (1,\ -2,\ 5,\ 1)\rangle$
    $Q\colon \langle(4,\ -3,\ 7,\ 1);\ (1,\ 3,\ -8,\ -2)\rangle$
19. $P\colon \langle(4,\ -1,\ 3,\ 1);\ (3,\ 2,\ 4,\ 8);\ (2,\ -2,\ 4,\ 0)\rangle$
    $Q\colon \langle(1,\ -3,\ -1,\ -7);\ (2,\ 5,\ 5,\ 17)\rangle$
20. $P\colon \langle(2,\ -1,\ 3,\ 1);\ (1,\ -2,\ -5,\ -9)\rangle$
    $Q\colon \langle(3,\ -3,\ -2,\ -8);\ (4,\ 3,\ -2,\ 4);\ (5,\ 1,\ -7,\ -5)\rangle$
21. $P\colon \langle(-8,\ -3,\ 4,\ -12);\ (8,\ 10,\ -5,\ 7)\rangle$
    $Q\colon \langle(8,\ 17,\ -6,\ 2);\ (-1,\ -5,\ 15,\ 8);\ (6,\ 7,\ 24,\ 18)\rangle$
22. $P\colon \langle(-12,\ -1,\ 0,\ -10);\ (4,\ 12,\ -10,\ 9)\rangle$
    $Q\colon \langle(-4,\ 23,\ -20,\ 8);\ (2,\ 0,\ 6,\ 1);\ (0,\ 23,\ -8,\ 10)\rangle$
23. $P\colon \langle(-7,\ -13,\ 13,\ 15);\ (5,\ 7,\ 9,\ -5)\rangle$
    $Q\colon \langle(3,\ 1,\ 31,\ 5);\ (0,\ 2,\ 12,\ -7);\ (3,\ -1,\ 19,\ 12)\rangle$
24. $P\colon \langle(8,\ 1,\ 12,\ 23);\ (9,\ 12,\ -16,\ -13)\rangle$
    $Q\colon \langle(1,\ 0,\ 13,\ -9);\ (17,\ 13,\ -4,\ 10)\rangle$

25. $P\colon \langle(2,\ 5,\ 14,\ -4);\ (18,\ 18,\ -1,\ 4)\rangle$
$Q\colon \langle(2,\ 5,\ -4,\ 3);\ (0,\ 0,\ 18,\ -7)\rangle$
26. $P\colon \langle(-2,\ 7,\ 10,\ -2);\ (8,\ 12,\ -6,\ 8)\rangle$
$Q\colon \langle(1,\ -1,\ 6,\ 0);\ (12,\ -2,\ -26,\ 12)\rangle$
27. $P\colon \langle(3,\ 6,\ 5,\ -3);\ (13,\ 11,\ -10,\ 5);\ (10,\ 5,\ -15,\ 8)\rangle$
$Q\colon \langle(2,\ -4,\ 0,\ 10);\ (5,\ 2,\ 5,\ 7)\rangle$
28. $P\colon \langle(-4,\ 12,\ 8,\ 3);\ (6,\ 17,\ -3,\ 10)\rangle$
$Q\colon \langle(2,\ 0,\ 3,\ 0);\ (10,\ 5,\ -11,\ 7)\rangle$
29. $P\colon \langle(4,\ 1,\ 16,\ -8);\ (5,\ -5,\ 3,\ 9)\rangle$
$Q\colon \langle(9,\ -4,\ 19,\ 1);\ (4,\ -2,\ 2,\ 7)\rangle$
30. $P\colon \langle(0,\ 3,\ 12,\ -6);\ (10,\ 8,\ -5,\ 9)\rangle$
$Q\colon \langle(9,\ 5,\ -10,\ 10);\ (1,\ 0,\ -7,\ 5)\rangle$.

Задание 4.[2] Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы.

$$1.\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

$$4.\ \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

[2]Задания 4–12 в работе № 5 и задания 1–11 в работе № 6 взяты из задачника [3].

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0 \\ 21x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x_1 + \dfrac{5}{4}x_2 + \dfrac{5}{7}x_3 + x_4 = 0 \\ \dfrac{3}{5}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{2}{5}x_4 = 0 \\ \dfrac{1}{5}x_1 + \dfrac{1}{6}x_2 + \dfrac{2}{21}x_3 + \dfrac{2}{15}x_4 = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0 \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

Задание 5. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

1. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ e_2' = 2e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$
$x = \{6, -1, 3\}$

2. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3 \\ e_2' = 3/2e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$
$x = \{1, 2, 4\}$

3. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 4e_3 \\ e_2' = 4/3e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$
$x = \{1, 3, 6\}$

4. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 3/2e_3 \\ e_2' = 3e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$
$x = \{2, 4, 1\}$

5. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 4/3e_3 \\ e_2' = 4e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$
$x = \{6, 3, 1\}$

6. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 5e_3 \\ e_2' = 5/4e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$
$x = \{1, 4, 8\}$

7. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 5/4e_3 \\ e_2' = 5e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{8,\ 4,\ 1\}$

8. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 6e_3 \\ e_2' = 6/5e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{2,\ 5,\ 10\}$

9. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 6/5e_3 \\ e_2' = 6e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{10,\ 5,\ 1\}$

10. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 7e_3 \\ e_2' = 7/6e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{1,\ 6,\ 12\}$

11. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 7/6e_3 \\ e_2' = 7e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{-12,\ 6,\ 1\}$

12. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 8e_3 \\ e_2' = 8/7e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{-1,\ 7,\ 14\}$

13. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - e_3 \\ e_2' = 1/2e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{-3,\ 2,\ 4\}$

14. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 1/2e_3 \\ e_2' = -e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{2,\ 4,\ 3\}$

15. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 2e_3 \\ e_2' = 2/3e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{2,\ 6,\ -3\}$

16. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 2/3e_3 \\ e_2' = -2e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{12,\ 3,\ -1\}$

17. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 3e_3 \\ e_2' = 3/4e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{1,\ -4,\ 8\}$

18. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 3e_3 \\ e_2' = 3/4e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{1,\ 4,\ -8\}$

19. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 4e_3 \\ e_2' = 4/5e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{7,\ -5,\ 10\}$

20. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 4/5e_3 \\ e_2' = -4e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{5,\ -5,\ -4\}$

21. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 5e_3 \\ e_2' = 5/6e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{1,\ -6,\ 6\}$

22. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 5/6e_3 \\ e_2' = -5e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{6,\ 6,\ 2\}$

23. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 6e_3 \\ e_2' = 6/7e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{1,\ 7,\ -7\}$

24. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 6/7e_3 \\ e_2' = -6e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ $x = \{7,\ 7,\ 2\}$

25. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 7e_3 \\ e_2' = 7/8e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$
$x = \{3,\ -8,\ 8\}$

26. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 8e_3 \\ e_2' = 8/9e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$
$x = \{1,\ -9,\ 9\}$

27. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 8/9e_3 \\ e_2' = -8e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$
$x = \{9,\ 9,\ 2\}$

28. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 9e_3 \\ e_2' = 9/10e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$
$x = \{3,\ -10,\ 10\}$

29. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 9/10e_3 \\ e_2' = -9e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$
$x = \{10,\ 10,\ 7\}$

30. $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 10e_3 \\ e_2' = 10/9e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$
$x = \{1,\ 9,\ 18\}$.

Задание 6. Пусть $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

1. $\mathcal{A}x = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\ -3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2x_3)$
   $\mathcal{B}x = (6 - 5x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2)$
   $\mathcal{C}x = (x_3^4,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2x_3)$
2. $\mathcal{A}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ x_2 + 2)$
   $\mathcal{B}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 0,\ x_2^4 + 2x_3)$
   $\mathcal{C}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\ 2x_1 - x_2,\ x_2 + 2x_3)$
3. $\mathcal{A}x = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + 2x_2^4 + 2x_2^4 + 3x_3)$
   $\mathcal{B}x = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$
   $\mathcal{C}x = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3)$
4. $\mathcal{A}x = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_3,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$
   $\mathcal{B}x = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ 1,\ 2x_1 - 3x_2 - 4)$
   $\mathcal{C}x = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_3,\ 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3)$
5. $\mathcal{A}x = (x_1,\ x_1 - 2x_2 - 3,\ 4x_1 - 5x_2 - 6)$
   $\mathcal{B}x = (x_1,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3,\ 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3)$
   $\mathcal{C}x = (x_1,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3,\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3)$
6. $\mathcal{A}x = (2x_1 + x_2,\ x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3)$
   $\mathcal{B}x = (2x_1 + x_2,\ x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$
   $\mathcal{C}x = (2x_1 + x_2,\ x_2 - 2,\ 3x_1 - 4x_2 - 5)$
7. $\mathcal{A}x = (x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$
   $\mathcal{B}x = (x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6)$
   $\mathcal{C}x = (x_1,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1^4 + 5x_2 + 6x_3)$
8. $\mathcal{A}x = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ 1,\ x_1 + 2x_2 + 3)$
   $\mathcal{B}x = (3x_1 = 2x_2 - x_3,\ 0,\ x_1^3 + 2x_2 + 3x_3)$
   $\mathcal{C}x = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$
9. $\mathcal{A}x = (2x_1 - x_2,\ x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3^4)$

$\mathcal{B}x = (2x_1 - x_2,\, x_3,\, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$
$\mathcal{C}x = (2x_2 - x_2,\, 1,\, x_2 + 2x_2 + 3)$

10. $\mathcal{A}x = (x_3,\, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$
$\mathcal{B}x = (x_3,\, 2x_1 + 3x_2 + 4,\, 5x_1 + 6x_2 + 7)$
$\mathcal{C}x = (x_3,\, 0,\, 5x_1^4 + 6x_2 + 7x_3)$
11. $\mathcal{A}x = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\, 3x_1 - 2x_2 - x_3,\, 0)$
$\mathcal{B}x = (6x_1 - 5x_2 - 4,\, 3x_1 - 2x_2 - x_3,\, 0)$
$\mathcal{C}x = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\, 3x_1 - 2x_2 - x_3^2,\, 0)$
12. $\mathcal{A}x = (5x_1 - 4x_2 - 3,\, 2x_1 - x_2,\, x_3^2)$
$\mathcal{B}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\, 2x_1 - x_2,\, 1)$
$\mathcal{C}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\, 2x_1 - x_2,\, x_3)$
13. $\mathcal{A}x = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\, x_1^2,\, x_2 + 2x_3)$
$\mathcal{B}x = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\, x_1,\, x_2 + 2x_3)$
$\mathcal{C}x = (4x_1 - 3x_2 - 2,\, x_1,\, x_2 + 2)$
14. $\mathcal{A}x = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\, 0,\, x_1 - 2x_2 - 3x_3)$
$\mathcal{B}x = (3x_1 + 2x_2 + 1,\, 0,\, x_1 - 2x_2 - 3)$
$\mathcal{C}x = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\, 0,\, x_1^2 - 2x_2 - 3x_3)$
15. $\mathcal{A}x = (x_1,\, x_2 - 2x_3,\, 3x_1 - 4x_2 - 5)$
$\mathcal{B}x = (x_1,\, x_2^2 - 2x_3,\, 3x_1 - 4x_2 - 5)$
$\mathcal{C}x = (x_1,\, x_2 - 2x_3,\, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$
16. $\mathcal{A}x = (2x_1 + x_2,\, x_3^2,\, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$
$\mathcal{B}x = (2x_1 + x_2,\, x_3,\, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$
$\mathcal{C}x = (2x_1 + x_2,\, x_3,\, 2x_1 - 3x_2 - 4)$
17. $\mathcal{A}x = (x_1,\, x_2 + 2x_3,\, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$
$\mathcal{B}x = (x_1,\, x_2 + 2x_3,\, 3x_1 + 4x_2 + 5)$
$\mathcal{C}x = (x_1,\, x_2^2 + 2x_3,\, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$
18. $\mathcal{A}x = (3x_1 - 2x_2 - 1,\, 0,\, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$
$\mathcal{B}x = (3x_1^2 - 2x_2 - x_3,\, 0,\, 0)$
$\mathcal{C}x = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\, 0,\, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$
19. $\mathcal{A}x = (2x_1^2 - x_2,\, x_3,\, 2x_2 + 3x_3)$
$\mathcal{B}x = (2x_1 - x_2,\, x_3,\, 2x_2 + 3x_3)$
$\mathcal{C}x = (2x_1 - x_2,\, x_3,\, 2x_2 + 3)$
20. $\mathcal{A}x = (0,\, x_1 + 2x_2 + 3x_3,\, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$
$\mathcal{B}x = (0,\, x_1 + 2x_2 + 3x_3,\, 4x_1 + 5x_2 + 6)$
$\mathcal{C}x = (0,\, x_1^2 + 2x_2 + 3x_3,\, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$
21. $\mathcal{A}x = (5x_1 - 5x_2 - 4x_3,\, 3x_1 - 2x_2 - x_3,\, x_2)$
$\mathcal{B}x = (5x_1 - 5x_2 - 4,\, 3x_1 - 2x_2 - x_3,\, x_2)$
$\mathcal{C}x = (5x_1 - 5x_2 - 4x_3^2,\, 3x_1 - 2x_2 - x_3,\, 0)$
22. $\mathcal{A}x = (5x_1 - 4x_2 - 3,\, 2x_1 - x_2,\, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$
$\mathcal{B}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3^3,\, 2x_1 - x_2,\, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$
$\mathcal{C}x = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\, 2x_1 - x_2,\, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$

23. $\mathcal{A}x = (4x_1 - 3x_2^3 - 2x_3,\ x_1 + x_3,\ 0)$
$\mathcal{B}x = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ x_1 + x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3)$
$\mathcal{C}x = (4x_1 - 3x_2 - 2,\ x_1 + x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3)$
24. $\mathcal{A}x = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3,\ 9x_1 + x_3)$
$\mathcal{B}x = (3x_1 + 4x_2 + 5,\ 6x_1 + 7x_2 + 8,\ 9x_1 + x_3)$
$\mathcal{C}x = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3^2,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3,\ 0)$
25. $\mathcal{A}x = (2x_1 + 3x_2 + 4,\ 5x_1 + 6x_2 + 7,\ 8x_1 + x_3)$
$\mathcal{B}x = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3,\ 0)$
$\mathcal{C}x = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3,\ 8x_1 + x_3)$
26. $\mathcal{A}x = (x_1^3 + x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\ 0)$
$\mathcal{B}x = (x_1 + x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$
$\mathcal{C}x = (x_1 + 1,\ 2x_1 + 3x_2 + 4,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$
27. $\mathcal{A}x = (3x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$
$\mathcal{B}x = (3x_1 - 2x_2 - 1,\ x_2 + 2,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$
$\mathcal{C}x = (3x_1 - 2x_2 - x_3^2,\ x_2 + 2x_3,\ 0)$
28. $\mathcal{A}x = (2x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 + 3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$
$\mathcal{B}x = (2x_1 - x_2^3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 0)$
$\mathcal{C}x = (2x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$
29. $\mathcal{A}x = (x_1^3 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3,\ 7x_1 + 8x_2)$
$\mathcal{B}x = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3,\ 7x_1 + 8x_2)$
$\mathcal{C}x = (x_1 + 2x_2 + 3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6,\ 7x_1 + 8x_2)$
30. $\mathcal{A}x = (x_2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$
$\mathcal{B}x = (x_2 + 2,\ 3x_1 + 4x_2 + 5,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$
$\mathcal{C}x = (x_2^3 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$.

Задание 7. Пусть $x = \{x_1,\ x_2,\ x_3\}$, $\mathcal{A}x = \{x_2 - x_3,\ x_1,\ x_1 + x_3\}$, $\mathcal{B}x = \{x_2,\ 2x_3,\ x_1\}$. Найти:

1. $\mathcal{AB}x$	2. $\mathcal{A}^2x$	3. $(\mathcal{A}^2 - \mathcal{B})x$
4. $\mathcal{B}^4x$	5. $\mathcal{B}^2x$	6. $(2\mathcal{A} + 3\mathcal{B}^2)x$
7. $(\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2)x$	8. $(\mathcal{B}^2 + \mathcal{A})x$	9. $\mathcal{BA}x$
10. $\mathcal{B}(2\mathcal{A} - \mathcal{B})x$	11. $\mathcal{A}(2\mathcal{B} - \mathcal{A})x$	12. $2(\mathcal{AB} + 2\mathcal{A})x$
13. $(\mathcal{A} - \mathcal{B})^2x$	14. $(\mathcal{B} - 2\mathcal{A}^2)x$	15. $\mathcal{BA}^2x$
16. $(3\mathcal{A}^2 + \mathcal{B})x$	17. $(\mathcal{A}^2 + \mathcal{B})x$	18. $(\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2)x$
19. $(2\mathcal{B} - \mathcal{A}^2)x$	20. $\mathcal{B}^3x$	21. $(\mathcal{B}^2 - 2\mathcal{A}x)$
22. $(\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{A}))x$	23. $(\mathcal{AB}^2)x$	24. $(\mathcal{A}(\mathcal{B} - \mathcal{A}))x$
25. $2(\mathcal{B} + 2\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2)x$	26. $(\mathcal{B}(\mathcal{A} - \mathcal{B}))x$	27. $(\mathcal{B} - \mathcal{A} + \mathcal{B}^2)x$
28. $(\mathcal{B}(\mathcal{A} + \mathcal{B}))x_2$	29. $(\mathcal{A} + \mathcal{BA} - \mathcal{B})x$	30. $(3\mathcal{B} + 2\mathcal{A}^2)x$.

Задание 8. Найти матрицу в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где

$$e_1' = e_1 - e_2 + e_3, \quad e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, \quad e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3,$$

если она задана в базисе (e_1, e_2, e_3).

1. $\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&4\\1&-1&2\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}0&2&3\\4&1&0\\2&-1&-2\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&2\\-1&1&2\end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix}0&3&2\\2&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}1&3&0\\2&1&-1\\0&2&1\end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix}2&1&2\\3&0&2\\1&0&1\end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix}0&1&2\\4&0&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\2&3&1\end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&2\\1&3&-1\end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\3&-1&1\end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix}1&0&2\\3&0&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix}2&0&0\\1&-1&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}$ 21. $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix}0&2&1\\0&3&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ 26. $\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}$ 27. $\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&3&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ 29. $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

Задание 9. Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора, действующего в пространстве $\mathbb{R}^3$:

1. проектирования на ось Ox,
2. проектирования на плоскость $z = 0$,
3. проектирования на ось Oz,
4. зеркального отображения относительно плоскости Oyz,
5. проектирования на ось Oy,
6. проектирования на плоскость $y = 0$,
7. зеркального отображения относительно плоскости $x - y = 0$,

8. зеркального отображения относительно плоскости $y+z=0$,
9. проектирования на плоскость $y-z=0$,
10. проектирования на плоскость $y=\sqrt{3}x$,
11. проектирования на плоскость Oyz,
12. зеркального отображения относительно плоскости $x-z=0$,
13. зеркального отображения относительно плоскости Oxy,
14. поворота относительно оси Ox на угол $\pi/2$ в положительном направлении,
15. проектирования на плоскость $x-y=0$,
16. проектирования на плоскость $y+z=0$,
17. зеркального отображения относительно плоскости $x+y=0$,
18. зеркального отображения относительно плоскости $y-z=0$,
19. проектирования на плоскость $x+y=0$,
20. проектирования на плоскость $x-z=0$,
21. зеркального отображения относительно плоскости $x+z=0$,
22. поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/2$,
23. проектирования на плоскость $\sqrt{3}y+z=0$,
24. зеркального отображения относительно плоскости Oxz,
25. поворота в положительном направлении относительно оси Oy на угол $\pi/2$,
26. проектирования на плоскость $x+z=0$,
27. проектирования на плоскость $y+\sqrt{3}z=0$,
28. проектирования на плоскость $\sqrt{3}x+z=0$,
29. проектирования на плоскость $\sqrt{3}x+y=0$,
30. поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/4$.

Задание 10. Найти собственные значения и жорданову форму.

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ 21. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & 5 & -2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 26. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 27. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{13}{3} \end{pmatrix}$ 29. $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Задание 11. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

1. $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$,
2. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$,
3. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$,
4. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$,
5. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$,
6. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2$,
7. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$,
8. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$,
9. $x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$,
10. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$,
11. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2$,
12. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$,
13. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$,
14. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$,
15. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$,
16. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$,

17. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+10x_2x_3+4x_3^2$,
18. $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$,
19. $x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2$,
20. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$,
21. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+2x_3^2$,
22. $4x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2^2+2x_3^2$,
23. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$,
24. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-4x_3^2$,
25. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$,
26. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-x_3^2$,
27. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-4x_3^2$,
28. $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3-x_3^2$,
29. $x_1^2+4x_1x_2-x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$,
30. $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-x_3^2$.

Задание 12. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

1. $4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$,
2. $4x_1^2+x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+2\sqrt{3}x_2x_3$,
3. $2x_1+2x_2+2x_3^2+8x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$,
4. $2x_1^2+9x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$,
5. $-4x_1^2-4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$,
6. $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2\sqrt{3}x_2x_3$,
7. $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$,
8. $3x_1^2+x_2^2-\frac{3}{2}x_3^2+2\sqrt{3}x_1x_2-x_1x_3+\sqrt{3}x_2x_3$,
9. $-x_1^2-x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3$,
10. $x_1^2-7x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$,
11. $\frac{5\sqrt{2}}{4}x_1^2+\frac{5\sqrt{2}}{4}x_2^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}x_3^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$,
12. $3x_1^2-7x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-8x_1x_3-8x_2x_3$,
13. $x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+5\sqrt{2}x_1x_3+\sqrt{2}x_2x_3$,
14. $x_1^2+x_2^2+x_3^2-\frac{4}{3}x_1x_2-\frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$,
15. $-2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+5\sqrt{2}x_1x_3+\sqrt{2}x_2x_3$,
16. $-\frac{1}{2}x_1^2+5x_2^2-\frac{1}{2}x_3^2-4x_1x_2+3x_1x_3+4x_2x_3$,
17. $x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_3+4x_2x_3$,
18. $-2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+4x_2x_3$,
19. $2x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-8x_1x_2-4\sqrt{2}x_1x_3+2\sqrt{2}x_2x_3$,
20. $-4x_1^2+x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$,

21. $10x_1^2+14x_2^2+7x_3^2-10x_1x_2-\sqrt{2}x_1x_3-5\sqrt{2}x_2x_3$,
22. $\frac{3}{2}x_1^2-5x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2+4x_1x_2-x_1x_3-4x_2x_3$,
23. $x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+2\sqrt{2}x_1x_3-2\sqrt{2}x_2x_3$,
24. $2x_1^2-3x_2^2-2\sqrt{3}x_3^2-4x_1x_3+4x_2x_3$,
25. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\frac{4}{3}x_1x_2+\frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$,
26. $x_1^2+x_3^2+8x_1x_2+4\sqrt{2}x_1x_3-2\sqrt{2}x_2x_3$,
27. $5x_1^2+13x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2+8x_2x_3$,
28. $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+\frac{2}{3}x_1x_2+\frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$,
29. $5x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-2\sqrt{2}x_1x_3+4\sqrt{2}x_2x_3$,
30. $-2x_1^2+5x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$.

Работа 6. Аналитическая геометрия

Задание 1. Написать разложение вектора $\mathbf{x}$ по векторам $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$.

1. $\mathbf{x}=\{-2,\ 4,\ 7\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 1,\ 2\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ 2,\ 4\}$,
2. $\mathbf{x}=\{6,\ 12,\ -1\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 3,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{2,\ -1,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{0,\ -1,\ 2\}$,
3. $\mathbf{x}=\{1,\ -4,\ 4\}$, $\mathbf{p}=\{2,\ 1,\ -1\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ 3,\ 2\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ -1,\ 1\}$,
4. $\mathbf{x}=\{-9,\ 5,\ 5\}$, $\mathbf{p}=\{4,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{2,\ 0,\ -3\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ 2,\ 1\}$,
5. $\mathbf{x}=\{-5,\ -5,\ 5\}$, $\mathbf{p}=\{-2,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ 3,\ -1\}$, $\mathbf{r}=\{0,\ 4,\ 1\}$,
6. $\mathbf{x}=\{13,\ 2,\ 7\}$, $\mathbf{p}=\{5,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{2,\ -1,\ 3\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 0,\ -1\}$,
7. $\mathbf{x}=\{-19,\ -1,\ 7\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{-2,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{3,\ 1,\ 0\}$,
8. $\mathbf{x}=\{3,\ -3,\ 4\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 0,\ 2\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ -1,\ 4\}$,
9. $\mathbf{x}=\{3,\ 3,\ -1\}$, $\mathbf{p}=\{3,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ 0,\ 2\}$,
10. $\mathbf{x}=\{-1,\ 7,\ -4\}$, $\mathbf{p}=\{-1,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{2,\ 0,\ 3\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 1,\ -1\}$,
11. $\mathbf{x}=\{6,\ 5,\ -14\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 1,\ 4\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ -3,\ 2\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ 1,\ -1\}$,
12. $\mathbf{x}=\{6,\ -1,\ 7\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ -2,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ 1,\ 3\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 0,\ 4\}$,
13. $\mathbf{x}=\{5,\ 15,\ 0\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 0,\ 5\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ 3,\ 2\}$, $\mathbf{r}=\{0,\ -1,\ 1\}$,
14. $\mathbf{x}=\{2,\ -1,\ 11\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ 1,\ -2\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 0,\ 3\}$,
15. $\mathbf{x}=\{11,\ 5,\ -3\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 0,\ 2\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ 5,\ -3\}$,
16. $\mathbf{x}=\{8,\ 0,\ 5\}$, $\mathbf{p}=\{2,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{r}=\{4,\ 1,\ 2\}$,
17. $\mathbf{x}=\{3,\ 1,\ 8\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 1,\ 3\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ 2,\ -1\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ 0,\ -1\}$,
18. $\mathbf{x}=\{8,\ 1,\ 12\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 2,\ -1\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ 0,\ 2\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ 1,\ 1\}$,
19. $\mathbf{x}=\{-9,\ -8,\ -3\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 4,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{-3,\ 2,\ 0\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ -1,\ 2\}$,
20. $\mathbf{x}=\{-5,\ 9,\ -13\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 1,\ -2\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ -1,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{4,\ 1,\ 0\}$,
21. $\mathbf{x}=\{-15,\ 5,\ 6\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 5,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ 2,\ -1\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ 1,\ 0\}$,
22. $\mathbf{x}=\{8,\ 9,\ 4\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ -2,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 3,\ 0\}$,
23. $\mathbf{x}=\{-23,\ -14,\ -30\}$, $\mathbf{p}=\{2,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ -1,\ 0\}$, $\mathbf{r}=\{-3,\ 2,\ 5\}$,
24. $\mathbf{x}=\{3,\ 1,\ 3\}$, $\mathbf{p}=\{2,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{4,\ 2,\ 1\}$,

25. $\mathbf{x} = \{-1,\ 7,\ 0\}$, $\mathbf{p} = \{0,\ 3,\ 1\}$, $\mathbf{q} = \{1,\ -1,\ 2\}$, $\mathbf{r} = \{2,\ -1,\ 0\}$,
26. $\mathbf{x} = \{11,\ -1,\ 4\}$, $\mathbf{p} = \{1,\ -1,\ 2\}$, $\mathbf{q} = \{3,\ 2,\ 0\}$, $\mathbf{r} = \{-1,\ 1,\ 1\}$,
27. $\mathbf{x} = \{-13,\ 2,\ 18\}$, $\mathbf{p} = \{1,\ 1,\ 4\}$, $\mathbf{q} = \{-3,\ 0,\ 2\}$, $\mathbf{r} = \{1,\ 2,\ -1\}$,
28. $\mathbf{x} = \{0,\ -8,\ 9\}$, $\mathbf{p} = \{0,\ -2,\ 1\}$, $\mathbf{q} = \{3,\ 1,\ -1\}$, $\mathbf{r} = \{4,\ 0,\ 1\}$,
29. $\mathbf{x} = \{8,\ -7,\ -13\}$, $\mathbf{p} = \{0,\ 1,\ 5\}$, $\mathbf{q} = \{3,\ -1,\ 2\}$, $\mathbf{r} = \{-1,\ 0,\ 1\}$,
30. $\mathbf{x} = \{2,\ 7,\ 5\}$, $\mathbf{p} = \{1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{q} = \{1,\ -2,\ 0\}$, $\mathbf{r} = \{0,\ 3,\ 1\}$.

Задание 2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$, построенные по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$?

1. $\mathbf{a} = \{1,\ -2,\ 3\}$, $\mathbf{b} = \{3,\ 0,\ -1\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{b} - \mathbf{a}$,
2. $\mathbf{a} = \{1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{b} = \{-2,\ 3,\ 5\}$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$,
3. $\mathbf{a} = \{-2,\ 4,\ 1\}$, $\mathbf{b} = \{1,\ -2,\ 7\}$, $\mathbf{c}_1 = 5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$,
4. $\mathbf{a} = \{1,\ 2,\ -3\}$, $\mathbf{b} = \{2,\ -1,\ -1\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 8\mathbf{a} - \mathbf{b}$,
5. $\mathbf{a} = \{3,\ 5,\ 4\}$, $\mathbf{b} = \{5,\ 9,\ 7\}$, $\mathbf{c}_1 = -2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$,
6. $\mathbf{a} = \{1,\ 4,\ -2\}$, $\mathbf{b} = \{1,\ 1,\ -1\}$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 4\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$,
7. $\mathbf{a} = \{1,\ -2,\ 5\}$, $\mathbf{b} = \{3,\ -1,\ 0\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$,
8. $\mathbf{a} = \{3,\ 4,\ -1\}$, $\mathbf{b} = \{2,\ -1,\ 1\}$, $\mathbf{c}_1 = 6\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$,
9. $\mathbf{a} = \{-2,\ -3,\ -2\}$, $\mathbf{b} = \{1,\ 0,\ 5\}$, $\mathbf{c}_1 = 3\mathbf{a} + 9\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = -\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$,
10. $\mathbf{a} = \{-1,\ 4,\ 2\}$, $\mathbf{b} = \{3,\ -2,\ 6\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{b} - 6\mathbf{a}$,
11. $\mathbf{a} = \{5,\ 0,\ -1\}$, $\mathbf{b} = \{7,\ 2,\ 3\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{b} - 6\mathbf{a}$,
12. $\mathbf{a} = \{0,\ 3,\ -2\}$, $\mathbf{b} = \{1,\ -2,\ 1\}$, $\mathbf{c}_1 = 5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$,
13. $\mathbf{a} = \{-2,\ 7,\ -1\}$, $\mathbf{b} = \{-3,\ 5,\ 2\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$,
14. $\mathbf{a} = \{3,\ 7,\ 0\}$, $\mathbf{b} = \{1,\ -3,\ 4\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$,
15. $\mathbf{a} = \{-1,\ 2,\ -1\}$, $\mathbf{b} = \{2,\ -7,\ 1\}$, $\mathbf{c}_1 = 6\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 3\mathbf{a}$,
16. $\mathbf{a} = \{7,\ 9,\ -2\}$, $\mathbf{b} = \{5,\ 4,\ 3\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 4\mathbf{b} - \mathbf{a}$,
17. $\mathbf{a} = \{5,\ 0,\ -2\}$, $\mathbf{b} = \{6,\ 4,\ 3\}$, $\mathbf{c}_1 = 5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 6\mathbf{b} - 10\mathbf{a}$,
18. $\mathbf{a} = \{8,\ 3,\ -1\}$, $\mathbf{b} = \{4,\ 1,\ 3\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{b} - 4\mathbf{a}$,
19. $\mathbf{a} = \{3,\ -1,\ 6\}$, $\mathbf{b} = \{5,\ 7,\ 10\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$,
20. $\mathbf{a} = \{1,\ -2,\ 4\}$, $\mathbf{b} = \{7,\ 3,\ 5\}$, $\mathbf{c}_1 = 6\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$,
21. $\mathbf{a} = \{3,\ 7,\ 0\}$, $\mathbf{b} = \{4,\ 6,\ -1\}$, $\mathbf{c}_1 = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 5\mathbf{a} - 7\mathbf{b}$,
22. $\mathbf{a} = \{2,\ -1,\ 4\}$, $\mathbf{b} = \{3,\ -7,\ -6\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$,
23. $\mathbf{a} = \{5,\ -1,\ -2\}$, $\mathbf{b} = \{6,\ 0,\ 7\}$, $\mathbf{c}_1 = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 4\mathbf{b} - 6\mathbf{a}$,
24. $\mathbf{a} = \{-9,\ 5,\ 3\}$, $\mathbf{b} = \{7,\ 1,\ -2\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$,
25. $\mathbf{a} = \{4,\ 2,\ 9\}$, $\mathbf{b} = \{0,\ -1,\ 3\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$, $\mathbf{c}_2 = 4\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$,
26. $\mathbf{a} = \{2,\ -1,\ 6\}$, $\mathbf{b} = \{-1,\ 3,\ 8\}$, $\mathbf{c}_1 = 5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$,
27. $\mathbf{a} = \{5,\ 0,\ 8\}$, $\mathbf{b} = \{-3,\ 1,\ 7\}$, $\mathbf{c}_1 = 3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 12\mathbf{b} - 9\mathbf{a}$,
28. $\mathbf{a} = \{-1,\ 3,\ 4\}$, $\mathbf{b} = \{2,\ -1,\ 0\}$, $\mathbf{c}_1 = 6\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 3\mathbf{a}$,
29. $\mathbf{a} = \{4,\ 2,\ -7\}$, $\mathbf{b} = \{5,\ 0,\ -3\}$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 6\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$,
30. $\mathbf{a} = \{2,\ 0,\ -5\}$, $\mathbf{b} = \{1,\ -3,\ 4\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = 5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

Задание 3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{p} - \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}}) = \pi/6$.

2. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/4$.
3. $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 1/5$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/2$.
4. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 5\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 1/2$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = 5\pi/6$.
5. $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} + \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = 3\pi/4$.
6. $\mathbf{a} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/3$.
7. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/2$.
8. $\mathbf{a} = 4\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 7$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/4$.
9. $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 4\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/6$.
10. $\mathbf{a} = \mathbf{p} + 4\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 7$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/3$.
11. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 10$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/2$.
12. $\mathbf{a} = 4\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 5$, $|\mathbf{q}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/4$.
13. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 6$, $|\mathbf{q}| = 7$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/3$.
14. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/3$.
15. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/4$.
16. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/6$.
17. $\mathbf{a} = 5\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/3$.
18. $\mathbf{a} = 7\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 1/2$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/2$.
19. $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/4$.
20. $\mathbf{a} = 10\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/6$.
21. $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 8$, $|\mathbf{q}| = 1/2$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/3$.
22. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 4\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$; $|\mathbf{p}| = 2,5$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/2$.
23. $\mathbf{a} = 7\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = 3\pi/4$.
24. $\mathbf{a} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{p} - \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = 2\pi/3$.
25. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 7$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/4$.
26. $\mathbf{a} = 5\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 5$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = 5\pi/6$.
27. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 4\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/4$.
28. $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{q} + \mathbf{p}$; $|\mathbf{p}| = 1/2$, $|\mathbf{q}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = 5\pi/6$.
29. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/3$.
30. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{p} + \mathbf{q}$; $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \pi/2$.

Задание 4. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$?

1. $\mathbf{a} = \{2, 3, 1\}$, $\mathbf{b} = \{-1, 0, -1\}$, $\mathbf{c} = \{2, 2, 2\}$.
2. $\mathbf{a} = \{3, 2, 1\}$, $\mathbf{b} = \{2, 3, 4\}$, $\mathbf{c} = \{3, 1, -1\}$.
3. $\mathbf{a} = \{1, 5, 2\}$, $\mathbf{b} = \{-1, 1, -1\}$, $\mathbf{c} = \{1, 1, 1\}$.
4. $\mathbf{a} = \{1, -1, -3\}$, $\mathbf{b} = \{3, 2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{2, 3, 4\}$.
5. $\mathbf{a} = \{3, 3, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{1, 1, 1\}$.
6. $\mathbf{a} = \{3, 1, -1\}$, $\mathbf{b} = \{-2, -1, 0\}$, $\mathbf{c} = \{5, 2, -1\}$.
7. $\mathbf{a} = \{4, 3, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{2, 2, 2\}$.
8. $\mathbf{a} = \{4, 3, 1\}$, $\mathbf{b} = \{6, 7, 4\}$, $\mathbf{c} = \{2, 0, -1\}$.
9. $\mathbf{a} = \{3, 2, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -3, -7\}$, $\mathbf{c} = \{1, 2, 3\}$.
10. $\mathbf{a} = \{3, 7, 2\}$, $\mathbf{b} = \{-2, 0, -1\}$, $\mathbf{c} = \{2, 2, 1\}$.
11. $\mathbf{a} = \{1, -2, 6\}$, $\mathbf{b} = \{1, 0, 1\}$, $\mathbf{c} = \{2, -6, 17\}$.

12. $\mathbf{a} = \{6,\ 3,\ 4\}$, $\mathbf{b} = \{-1,\ -2,\ -1\}$, $\mathbf{c} = \{2,\ 1,\ 2\}$.
13. $\mathbf{a} = \{7,\ 3,\ 4\}$, $\mathbf{b} = \{-1,\ -2,\ -1\}$, $\mathbf{c} = \{4,\ 2,\ 4\}$.
14. $\mathbf{a} = \{2,\ 3,\ 2\}$, $\mathbf{b} = \{4,\ 7,\ 5\}$, $\mathbf{c} = \{2,\ 0,\ -1\}$.
15. $\mathbf{a} = \{5,\ 3,\ 4\}$, $\mathbf{b} = \{-1,\ 0,\ -1\}$, $\mathbf{c} = \{4,\ 2,\ 4\}$.
16. $\mathbf{a} = \{3,\ 10,\ 5\}$, $\mathbf{b} = \{-2,\ -2,\ -3\}$, $\mathbf{c} = \{2,\ 4,\ 3\}$.
17. $\mathbf{a} = \{-2,\ -4,\ -3\}$, $\mathbf{b} = \{4,\ 3,\ 1\}$, $\mathbf{c} = \{6,\ 7,\ 4\}$.
18. $\mathbf{a} = \{3,\ 1,\ -1\}$, $\mathbf{b} = \{1,\ 0,\ -1\}$, $\mathbf{c} = \{8,\ 3,\ -2\}$.
19. $\mathbf{a} = \{4,\ 2,\ 2\}$, $\mathbf{b} = \{-3,\ -3,\ -3\}$, $\mathbf{c} = \{2,\ 1,\ 2\}$.
20. $\mathbf{a} = \{4,\ 1,\ 2\}$, $\mathbf{b} = \{9,\ 2,\ 5\}$, $\mathbf{c} = \{1,\ 1,\ -1\}$.
21. $\mathbf{a} = \{5,\ 3,\ 4\}$, $\mathbf{b} = \{4,\ 3,\ 3\}$, $\mathbf{c} = \{9,\ 5,\ 8\}$.
22. $\mathbf{a} = \{3,\ 4,\ 2\}$, $\mathbf{b} = \{1,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{c} = \{8,\ 11,\ 6\}$.
23. $\mathbf{a} = \{4,\ -1,\ -6\}$, $\mathbf{b} = \{1,\ -3,\ -7\}$, $\mathbf{c} = \{2,\ -1,\ -4\}$.
24. $\mathbf{a} = \{3,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{b} = \{-5,\ -4,\ -5\}$, $\mathbf{c} = \{4,\ 2,\ 4\}$.
25. $\mathbf{a} = \{3,\ 0,\ 3\}$, $\mathbf{b} = \{8,\ 1,\ 6\}$, $\mathbf{c} = \{1,\ 1,\ -1\}$.
26. $\mathbf{a} = \{1,\ -1,\ 4\}$, $\mathbf{b} = \{1,\ 0,\ 3\}$, $\mathbf{c} = \{1,\ -3,\ 8\}$.
27. $\mathbf{a} = \{6,\ 3,\ 4\}$, $\mathbf{b} = \{-1,\ -2,\ -1\}$, $\mathbf{c} = \{2,\ 1,\ 2\}$.
28. $\mathbf{a} = \{4,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{b} = \{-9,\ -4,\ -9\}$, $\mathbf{c} = \{6,\ 2,\ 6\}$.
29. $\mathbf{a} = \{-3,\ 3,\ 3\}$, $\mathbf{b} = \{-4,\ 7,\ 6\}$, $\mathbf{c} = \{3,\ 0,\ -1\}$.
30. $\mathbf{a} = \{-7,\ 10,\ -5\}$, $\mathbf{b} = \{0,\ -2,\ -1\}$, $\mathbf{c} = \{-2,\ 4,\ -1\}$.

Задание 5. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(1,\ 3,\ 6)$, $A_2(2,\ 2,\ 1)$, $A_3(-1,\ 0,\ 1)$, $A_4(-4,\ 6,\ -3)$.
2. $A_1(-4,\ 2,\ 6)$, $A_2(2,\ -3,\ 0)$, $A_3(-10,\ 5,\ 8)$, $A_4(-5,\ 2,\ -4)$.
3. $A_1(7,\ 2,\ 4)$, $A_2(7,\ -1,\ -2)$, $A_3(3,\ 3,\ 1)$, $A_4(-4,\ 2,\ 1)$.
4. $A_1(2,\ 1,\ 4)$, $A_2(-1,\ 5,\ -2)$, $A_3(-7,\ -3,\ 2)$, $A_4(-6,\ -3,\ 6)$.
5. $A_1(-1,\ -5,\ 2)$, $A_2(-6,\ 0,\ -3)$, $A_3(3,\ 6,\ -3)$, $A_4(-10,\ 6,\ 7)$.
6. $A_1(0,\ -1,\ -1)$, $A_2(-2,\ 3,\ 5)$, $A_3(1,\ -5,\ -9)$, $A_4(-1,\ -6,\ 3)$.
7. $A_1(5,\ 2,\ 0)$, $A_2(2,\ 5,\ 0)$, $A_3(1,\ 2,\ 4)$, $A_4(-1,\ 1,\ 1)$.
8. $A_1(2,\ -1,\ -2)$, $A_2(1,\ 2,\ 1)$, $A_3(5,\ 0,\ -6)$, $A_4(-10,\ 9,\ -7)$.
9. $A_1(-2,\ 0,\ -4)$, $A_2(-1,\ 7,\ 1)$, $A_3(4,\ -8,\ -4)$, $A_4(1,\ -4,\ 6)$.
10. $A_1(14,\ 4,\ 5)$, $A_2(-5,\ -3,\ 2)$, $A_3(-2,\ -6,\ -3)$, $A_4(-2,\ 2,\ -1)$.
11. $A_1(1,\ 2,\ 0)$, $A_2(3,\ 0,\ -3)$, $A_3(5,\ 2,\ 6)$, $A_4(8,\ 4,\ -9)$.
12. $A_1(2,\ -1,\ 2)$, $A_2(1,\ 2,\ -1)$, $A_3(3,\ 2,\ 1)$, $A_4(-4,\ 2,\ 5)$.
13. $A_1(1,\ 1,\ 2)$, $A_2(-1,\ 1,\ 3)$, $A_3(2,\ -2,\ 4)$, $A_4(-1,\ 0,\ -2)$.
14. $A_1(2,\ 3,\ 1)$, $A_2(4,\ 1,\ -2)$, $A_3(6,\ 3,\ 7)$, $A_4(7,\ 5,\ -3)$.
15. $A_1(1,\ 1,\ -1)$, $A_2(2,\ 3,\ 1)$, $A_3(3,\ 2,\ 1)$, $A_4(5,\ 9,\ -8)$.
16. $A_1(1,\ 5,\ -7)$, $A_2(-3,\ 6,\ 3)$, $A_3(-2,\ 7,\ 3)$, $A_4(-4,\ 8,\ -12)$.
17. $A_1(-3,\ 4,\ -7)$, $A_2(1,\ 5,\ -4)$, $A_3(-5,\ -2,\ 0)$, $A_4(2,\ 5,\ 4)$.
18. $A_1(-1,\ 2,\ -3)$, $A_2(4,\ -1,\ 0)$, $A_3(2,\ 1,\ -2)$, $A_4(3,\ 4,\ 5)$.
19. $A_1(4,\ -1,\ 3)$, $A_2(-2,\ 1,\ 0)$, $A_3(0,\ -5,\ 1)$, $A_4(3,\ 2,\ -6)$.

20. $A_1(1,\ -1,\ 1)$, $A_2(-2,\ 0,\ 3)$, $A_3(2,\ 1,\ -1)$, $A_4(2,\ -2,\ -4)$.
21. $A_1(1,\ 2,\ 0)$, $A_2(1,\ -1,\ 2)$, $A_3(0,\ 1,\ -1)$, $A_4(-3,\ 0,\ 1)$.
22. $A_1(1,\ 0,\ 2)$, $A_2(1,\ 2,\ -1)$, $A_3(2,\ -2,\ 1)$, $A_4(2,\ 1,\ 0)$.
23. $A_1(1,\ 2,\ -3)$, $A_2(1,\ 0,\ 1)$, $A_3(-2,\ -1,\ 6)$, $A_4(0,\ -5,\ -4)$.
24. $A_1(3,\ 10,\ -1)$, $A_2(-2,\ 3,\ -5)$, $A_3(-6,\ 0,\ -3)$, $A_4(1,\ -1,\ 2)$.
25. $A_1(-1,\ 2,\ 4)$, $A_2(-1,\ -2,\ -4)$, $A_3(3,\ 0,\ -1)$, $A_4(7,\ -3,\ 1)$.
26. $A_1(0,\ -3,\ 1)$, $A_2(-4,\ 1,\ 2)$, $A_3(2,\ -1,\ 5)$, $A_4(3,\ 1,\ -4)$.
27. $A_1(1,\ 3,\ 0)$, $A_2(4,\ -1,\ 2)$, $A_3(3,\ 0,\ 1)$, $A_4(-4,\ 3,\ 5)$.
28. $A_1(-2,\ -1,\ -1)$, $A_2(0,\ 3,\ 2)$, $A_3(3,\ 1,\ -4)$, $A_4(-4,\ 7,\ 3)$.
29. $A_1(-3,\ -5,\ 6)$, $A_2(2,\ 1,\ -4)$, $A_3(0,\ -3,\ -1)$, $A_4(-5,\ 2,\ -8)$.
30. $A_1(2,\ -4,\ -3)$, $A_2(5,\ -6,\ 0)$, $A_3(-1,\ 3,\ -3)$, $A_4(-10,\ -8,\ 7)$.

Задание 6. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3.

1. $M_1(-3,\ 4,\ -7)$, $M_2(1,\ 5,\ -4)$, $M_3(-5,\ -2,\ 0)$, $M_0(-12,\ 7,\ -1)$.
2. $M_1(-1,\ 2,\ -3)$, $M_2(4,\ -1,\ 0)$, $M_3(2,\ 1,\ -2)$, $M_0(1,\ -6,\ -5)$.
3. $M_1(-3,\ -1,\ 1)$, $M_2(-9,\ 1,\ -2)$, $M_3(3,\ -5,\ 4)$, $M_0(-7,\ 0,\ -1)$.
4. $M_1(1,\ -1,\ 1)$, $M_2(-2,\ 0,\ 3)$, $M_3(2,\ 1,\ -1)$, $M_0(-2,\ 4,\ 2)$.
5. $M_1(1,\ 2,\ 0)$, $M_2(1,\ -1,\ 2)$, $M_3(0,\ 1,\ -1)$, $M_0(2,\ -1,\ 4)$.
6. $M_1(1,\ 0,\ 2)$, $M_2(1,\ 2,\ -1)$, $M_3(2,\ -2,\ 1)$, $M_0(-5,\ -9,\ 1)$.
7. $M_1(1,\ 2,\ -3)$, $M_2(1,\ 0,\ 1)$, $M_3(-2,\ -1,\ 6)$, $M_0(3,\ -2,\ -9)$.
8. $M_1(3,\ 10,\ -1)$, $M_2(-2,\ 3,\ -5)$, $M_3(-6,\ 0,\ -3)$, $M_0(-6,\ 7,\ -10)$.
9. $M_1(-1,\ 2,\ 4)$, $M_2(-1,\ -2,\ -4)$, $M_3(3,\ 0,\ -1)$, $M_0(-2,\ 3,\ 5)$.
10. $M_1(0,\ -3,\ 1)$, $M_2(-4,\ 1,\ 2)$, $M_3(2,\ -1,\ 5)$, $M_0(-3,\ 4,\ -5)$.
11. $M_1(1,\ 3,\ 0)$, $M_2(4,\ -1,\ 2)$, $M_3(3,\ 0,\ 1)$, $M_0(4,\ 3,\ 0)$.
12. $M_1(-2,\ -1,\ -1)$, $M_2(0,\ 3,\ 2)$, $M_3(3,\ 1,\ -4)$, $M_0(-21,\ 20,\ -16)$.
13. $M_1(-3,\ -5,\ 6)$, $M_2(2,\ 1,\ -4)$, $M_3(0,\ -3,\ -1)$, $M_0(3,\ 6,\ 68)$.
14. $M_1(2,\ -4,\ -3)$, $M_2(5,\ -6,\ 0)$, $M_3(-1,\ 3,\ -3)$, $M_0(2,\ -10,\ 8)$.
15. $M_1(1,\ -1,\ 2)$, $M_2(2,\ 1,\ 2)$, $M_3(1,\ 1,\ 4)$, $M_0(-3,\ 2,\ 7)$.
16. $M_1(1,\ 3,\ 6)$, $M_2(2,\ 2,\ 1)$, $M_3(-1,\ 0,\ 1)$, $M_0(5,\ -4,\ 5)$.
17. $M_1(-4,\ 2,\ 6)$, $M_2(2,\ -3,\ 0)$, $M_3(-10,\ 5,\ 8)$, $M_0(-12,\ 1,\ 8)$.
18. $M_1(7,\ 2,\ 4)$, $M_2(7,\ -1,\ -2)$, $M_3(-5,\ -2,\ -1)$, $M_0(10,\ 1,\ 8)$.
19. $M_1(2,\ 1,\ 4)$, $M_2(3,\ 5,\ -2)$, $M_3(-7,\ -3,\ 2)$, $M_0(-3,\ 1,\ 8)$.
20. $M_1(-1,\ -5,\ 2)$, $M_2(-6,\ 0,\ -3)$, $M_3(3,\ 6,\ -3)$, $M_0(10,\ -8,\ -7)$.
21. $M_1(0,\ -1,\ -1)$, $M_2(-2,\ 3,\ 5)$, $M_3(1,\ -5,\ -9)$, $M_0(-4,\ -13,\ 6)$.
22. $M_1(5,\ 2,\ 0)$, $M_2(2,\ 5,\ 0)$, $M_3(1,\ 2,\ 4)$, $M_0(-3,\ -6,\ -8)$.
23. $M_1(2,\ -1,\ -2)$, $M_2(1,\ 2,\ 1)$, $M_3(5,\ 0,\ -6)$, $M_0(14,\ -3,\ 7)$.
24. $M_1(-2,\ 0,\ -4)$, $M_2(-1,\ 7,\ 1)$, $M_3(4,\ -8,\ -4)$, $M_0(-6,\ 5,\ 5)$.
25. $M_1(14,\ 4,\ 5)$, $M_2(-5,\ -3,\ 2)$, $M_3(-2,\ -6,\ -3)$, $M_0(-1,\ -8,\ 7)$.
26. $M_1(1,\ 2,\ 0)$, $M_2(3,\ 0,\ -3)$, $M_3(5,\ 2,\ 6)$, $M_0(-13,\ -8,\ 16)$.
27. $M_1(2,\ -1,\ 2)$, $M_2(1,\ 2,\ -1)$, $M_3(3,\ 2,\ 1)$, $M_0(-5,\ 3,\ 7)$.
28. $M_1(1,\ 1,\ 2)$, $M_2(-1,\ 1,\ 3)$, $M_3(2,\ -2,\ 4)$, $M_0(2,\ 3,\ 8)$.

29. $M_1(2,\ 3,\ 1)$, $M_2(4,\ 1,\ -2)$, $M_3(6,\ 3,\ 7)$, $M_0(-5,\ -4,\ 8)$.
30. $M_1(1,\ 1,\ -1)$, $M_2(2,\ 3,\ 1)$, $M_3(3,\ 2,\ 1)$, $M_0(-3,\ -7,\ 6)$.

Задание 7. Найти угол между плоскостями.
1. $x-3y+5=0$, $2x-y+5z-16=0$.
2. $x-3y+z-1=0$, $x+z-1=0$.
3. $4x-5y+3z-1=0$, $x-4y-z+0=0$.
4. $3x-y+2z+15=0$, $5x+9y-3z-1=0$.
5. $6x+2y-4z+17=0$, $9x+3y-6z-4=0$.
6. $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $x+y\sqrt{2}-z+3=0$.
7. $3y-z=0$, $2y+z=0$.
8. $6x+3y-2z=0$, $x+2y+6z-12=0$.
9. $x+2y+2z-3=0$, $16x+12y-15z-1=0$.
10. $2x-y+5z+16=0$, $x+2y+3z+8=0$.
11. $2x+2y+z-1=0$, $x+z-1=0$.
12. $3x+y+z-4=0$, $y+z+5=0$.
13. $3x-2y-2z-16=0$, $x+y-3z-7=0$.
14. $2x+2y+z+9=0$, $x-y+3z-1=0$.
15. $x+2y+2z-3=0$, $2x-y+2z+5=0$.
16. $3x+2y-3z-1=0$, $x+y+z-7=0$.
17. $x-3y-2z-8=0$, $x+y-z+3=0$.
18. $3x-2y+3z+23=0$, $y+z+5=0$.
19. $x+y+3z-7=0$, $y+z-1=0$.
20. $x-2y+2z+17=0$, $x-2y-1=0$.
21. $x+2y-1=0$, $x+y+6=0$.
22. $2x-z+5=0$, $2x+3y-7=0$.
23. $5x+3y+z-18=0$, $2y+z-9=0$.
24. $4x+3z-2=0$, $x+2y+2z+5=0$.
25. $x+4y-z+1=0$, $2x+y+4z-3=0$.
26. $2y+z-9=0$, $x-y+2z-1=0$.
27. $2x-6y+14z-1=0$, $5x-15y+35z-3=0$.
28. $x-y+7z-1=0$, $2x-2y-5=0$.
29. $3x-y-5=0$, $2x+y-3=0$.
30. $x+y+z\sqrt{2}-3=0$, $x-y+z\sqrt{2}-1=0$.

Задание 8. Написать канонические уравнения прямой.
1. $2x+y+z-2=0$, $2x-y-3z=0$.
2. $x-3y+2z+2=0$, $x+3y+z+14=0$.
3. $x-2y+z-4=0$, $2x+2y-z-8=0$.
4. $x+y+z-2=0$, $x-y-2z+2=0$.
5. $2x+3y+z+6=0$, $x-3y-2z+3=0$.
6. $3x+y-z-6=0$, $3x-y+2z=0$.
7. $x+5y+2z+11=0$, $x-y-z-1=0$.

8. $3x+4y-2z+1=0$, $2x-4y+3z+4=0$.
9. $5x+y-3z+4=0$, $x-y+2z+2=0$.
10. $x-y-z-2=0$, $x-2y+z+4=0$.
11. $4x+y-3z+2=0$, $2x-y+z-8=0$.
12. $3x+3y-2z-1=0$, $2x-3y+z+6=0$.
13. $6x-7y-4z-2=0$, $x+7y-z-5=0$.
14. $8x-y-3z-1=0$, $x+y+z+10=0$.
15. $6x-5y-4z+8=0$, $6x+5y+3z+4=0$.
16. $x+5y-z-5=0$, $2x-5y+2z+5=0$.
17. $2x-3y+z+6=0$, $x-3y-2z+3=0$.
18. $5x+y+2z+4=0$, $x-y-3z+2=0$.
19. $4x+y+z+2=0$, $2x-y-3z-8=0$.
20. $2x+y-3z-2=0$, $2x-y+z+6=0$.
21. $x+y-2z-2=0$, $x-y+z+2=0$.
22. $x+5y-z+11=0$, $x-y+2z-1=0$.
23. $x-y+z-2=0$, $x-2y-z+4=0$.
24. $6x-7y-z-2=0$, $x+7y-4z-5=0$.
25. $x+5y+2z-5=0$, $2x-5y-z+5=0$.
26. $x-3y+z+2=0$, $x+3y+2z+14=0$.
27. $2x+3y-2z+6=0$, $x-3y+z+3=0$.
28. $3x+4y+3z+1=0$, $2x-4y-2z+4=0$.
29. $3x+3y+z-1=0$, $2x-3y-2z+6=0$.
30. $6x-5y+3z+8=0$, $6x+5y-4z+4=0$.

Задание 9. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

1. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$, $x+2y+3z-14=0$.
2. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$, $x+2y-5z+20=0=0$.
3. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-1}{2}$, $x-3y+7z-24=0$.
4. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{2}$, $2x-y+4z=0$.
5. $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$, $3x+y-5z-12=0$.
6. $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$, $x+3y-5z+9=0$.
7. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$, $x-2y+5z+17=0$.
8. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-4}{1}$, $x-2y+4z-19=0$.

9. $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+4}{-1}$, $2x-y+3z+23=0$.

10. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+3}{0}$, $2x-3y-5z-7=0$.

11. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$, $4x+2y-z-11=0$.

12. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$, $3x-2y-4z-8=0$.

13. $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$, $x+2y-z-2=0$.

14. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y+2}{3}$, $5x-y+4z+3=0$.

15. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$, $x+3y+5z-42=0$.

16. $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z-4}{2}$, $7x+y+4z-47=0$.

17. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{5}$, $2x+3y+7z-52=0$.

18. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+3}{2}$, $3x+4y+7z-16=0$.

19. $\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+4}{-1}$, $2x-5y+4z+24=0$.

20. $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-8}{-5}=\dfrac{z+5}{12}$, $x-2y-3z+18=0$.

21. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{0}$, $x+7y+3z+11=0$.

22. $\dfrac{x-5}{-1}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-1}{2}$, $3x+7y-5z-11=0$.

23. $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-6}{-1}$, $4x+y-6z-5=0$.

24. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-8}{0}$, $5x+9y+4z-25=0$.

25. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+1}{3}$, $x+4y+13z-23=0$.

26. $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{3}$, $3x-2y+5z-3=0$.

27. $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+3}{-2}$, $3x-y+4z=0$.

28. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-3}{-2}$, $x+2y-5z+16=0$.

29. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z+2}{-2}$, $3x-7y-2z+7=0$.

30. $\dfrac{x+3}{0}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+5}{11}$, $5x+7y+9z-32=0$.

Задание 10. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой (для вариантов 1–15) или плоскости (для вариантов 16–30).

1. $M(0,\,-3,\,-2)$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

2. $M(2,\,-1,\,1)$, $\dfrac{x-4,5}{1}=\dfrac{y+3}{-0,5}=\dfrac{z-2}{1}$.

3. $M(1,\,1,\,1)$, $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$.

4. $M(1,\,2,\,3)$, $\dfrac{x-0,5}{0}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z-1,5}{1}$.

5. $M(1,\,0,\,-1)$, $\dfrac{x-3,5}{2}=\dfrac{y-1,5}{2}=\dfrac{z}{0}$.

6. $M(2,\,1,\,0)$, $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z+0,5}{1}$.

7. $M(-2,\,-3,\,0)$, $\dfrac{x+0,5}{1}=\dfrac{y+1,5}{0}=\dfrac{z-0,5}{1}$.

8. $M(-1,\,0,\,-1)$, $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1,5}{0}=\dfrac{z-2}{1}$.

9. $M(0,\,2,\,1)$, $\dfrac{x-1,5}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

10. $M(3,\,-3,\,-1)$, $\dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-3,5}{4}=\dfrac{z+0,5}{0}$.

11. $M(3,\,3,\,3)$, $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1,5}{0}=\dfrac{z-3}{1}$.

12. $M(-1,\,2,\,0)$, $\dfrac{x+0,5}{1}=\dfrac{y+0,7}{-0,2}=\dfrac{z-2}{2}$.

13. $M(2,\,-2,\,-3)$, $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+0,5}{0}=\dfrac{z+1,5}{0}$.

14. $M(-1,\,0,\,1)$, $\dfrac{x+0,5}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-4}{2}$.

15. $M(0,\,-3,\,-2)$, $\dfrac{x-0,5}{0}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z-1,5}{1}$.

16. $M(1,\, 0,\, 1)$, $4x+6y+4z-25=0$.
17. $M(-1,\, 0,\, -1)$, $2x+6y-2z+11=0$.
18. $M(0,\, 2,\, 1)$, $2x+4y-3=0$.
19. $M(2,\, 1,\, 0)$, $y+z+2=0$.
20. $M(-1,\, 2,\, 0)$, $4x-5y-z-7=0$.
21. $M(2,\, -1,\, 1)$, $x-y+2z-2=0$.
22. $M(1,\, 1,\, 1)$, $x+4y+3z+5=0$.
23. $M(1,\, 2,\, 3)$, $2x+10y+10z-1=0$.
24. $M(0,\, -3,\, -2)$, $2x+10y+10z-1=0$.
25. $M(1,\, 0,\, -1)$, $2y+4z-1=0$.
26. $M(3,\, -3,\, -1)$, $2x-4y-4z-13=0$.
27. $M(-2,\, -3,\, 0)$, $x+5y+4=0$.
28. $M(2,\, -2,\, -3)$, $y+z+2=0$.
29. $M(-1,\, 0,\, 1)$, $2x+4y-3=0$.
30. $M(3,\, 3,\, 3)$, $8x+6y+8z-25=0$.

Задание 11. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

1. $-x^2-y^2+4xy+2x-4y+1=0$.
2. $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0$.
3. $4xy+4x-4y=0$.
4. $-2x^2-2y^2+2xy-6x+6y+3=0$.
5. $-3x^2-3y^2+4xy-6x+4y+2=0$.
6. $-2xy-2x-2y+1=0$.
7. $-x^2-y^2-4xy-4x-2y+2=0$.
8. $-4x^2-4y^2+2xy+10x-10y+1=0$.
9. $4xy+4x-4y-2=0$.
10. $x^2+y^2+2xy-8x-8y+1=0$.
11. $x^2+y^2+4xy-8x-4y+1=0$.
12. $x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0$.
13. $2xy+2x+2y-3=0$.
14. $4x^2+4y^2+2xy+12x+12y+1=0$.
15. $3x^2+3y^2+4xy+8x+12y+1=0$.
16. $x^2+y^2-8xy-20x+20y+1=0$.
17. $3x^2+3y^2-2xy-6x+2y+1=0$.
18. $4xy+4x+4y+1=0$.
19. $3x^2+3y^2-4xy+6x-4y-7=0$.
20. $-4xy-4x+4y+6=0$.
21. $5x^2+5y^2-2xy+10x-2y+1=0$.
22. $2x^2+2y^2+4xy+8x+8y+1=0$.
23. $-x^2-y^2+2xy+2x-2y+1=0$.
24. $2x^2+2y^2-4xy-8x+8y+1=0$.
25. $3x^2+3y^2+2xy-12x-4y+1=0$.

26. $-4xy + 8x + 8y + 1 = 0.$
27. $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 6 = 0.$
28. $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0.$
29. $4xy + 4x - 4y + 4 = 0.$
30. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x + 4y + 1 = 0.$

Задание 12. Найти и изобразить геометрическое место точек, у которых отношение расстояний до точки F и до прямой l постоянно и равно ε.

1.	$F(2;0)$;	$l\colon x = 3$;	$\varepsilon = \frac{\sqrt{6}}{3}$;
2.	$F(-1;-2)$;	$l\colon x = -3$;	$\varepsilon = 1$;
3.	$F(-1;0)$;	$l\colon x = -9$;	$\varepsilon = \frac{1}{3}$;
4.	$F(3;3)$;	$l\colon y = -2$;	$\varepsilon = 1$;
5.	$F(-3;2)$;	$l\colon x = 2$;	$\varepsilon = 1$;
6.	$F(-4;5)$;	$l\colon x = -8$;	$\varepsilon = 0,75$;
7.	$F(-1;0)$;	$l\colon x = -4$;	$\varepsilon = \frac{1}{2}$;
8.	$F(1;0)$;	$l\colon y = 3$;	$\varepsilon = 1$;
9.	$F(2;0)$;	$l\colon 2x + 5 = 0$;	$\varepsilon = \frac{4}{5}$;
10.	$F(7;0)$;	$l\colon x = 1$;	$\varepsilon = \sqrt{7}$;
11.	$F(2;0)$;	$l\colon x = 4,5$;	$\varepsilon = \frac{2}{3}$;
12.	$F(2;0)$;	$l\colon x = \frac{1}{2}$;	$\varepsilon = 2$;
13.	$F(3;0)$;	$l\colon x = 12$;	$\varepsilon = 0,5$;
14.	$F(0;2)$;	$l\colon y = 4$;	$\varepsilon = 1$;
15.	$F(2;6)$;	$l\colon y + 2 = 0$;	$\varepsilon = 1$;
16.	$F(0;-1)$;	$l\colon y = -9$;	$\varepsilon = \frac{1}{3}$;
17.	$F(2;5)$;	$l\colon y = 1$;	$\varepsilon = 1$;
18.	$F(0;-1)$;	$l\colon y = -4$;	$\varepsilon = \frac{1}{2}$;
19.	$F(3;-4)$;	$l\colon y = 2$;	$\varepsilon = 1$;
20.	$F(0;2)$;	$l\colon 2y - 9 = 0$;	$\varepsilon = \frac{2}{3}$;
21.	$F(-4;3)$;	$l\colon y = -1$;	$\varepsilon = 1$;
22.	$F(3;0)$;	$l\colon x = 2$;	$\varepsilon = 3$;
23.	$F(2;0)$;	$l\colon 5x + 8 = 0$;	$\varepsilon = \frac{5}{4}$;
24.	$F(6;0)$;	$l\colon x = 1,5$;	$\varepsilon = 2$;
25.	$F(-2;-3)$;	$l\colon y = -1$;	$\varepsilon = 1$;

26. $F(0;2)$; $l\colon y=-2,5$; $\varepsilon=\frac{4}{5}$;
27. $F(1;-1)$; $l\colon y=3$; $\varepsilon=1$;
28. $F(1;0)$; $l\colon x=4$; $\varepsilon=\frac{1}{2}$;
29. $F(-2;0)$; $l\colon x=-3$; $\varepsilon=\sqrt{\frac{2}{3}}$;
30. $F(2;0)$; $l\colon x=0$; $\varepsilon=1$.

Задание 13. Изобразить на плоскости множество точек, удовлетворяющих данному уравнению (при выполнении заданий считать, что $\rho\geqslant 0$).

1. а) $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\varphi}$ б) $\rho=2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$, $\varphi>0$ (логарифмическая спираль)
2. а) $\rho=\dfrac{1}{3-5\cos\varphi}$ б) $\rho=\dfrac{2\varphi}{\pi}$ (спираль Архимеда)
3. а) $\rho=\dfrac{3}{2-2\cos\varphi}$ б) $\rho=2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$, $\varphi<0$ (логарифмическая спираль)
4. а) $\rho=\dfrac{1}{2-3\cos\varphi}$ б) $\rho=\dfrac{-\varphi}{2\pi}$(спираль Архимеда)
5. а) $\rho=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-2\cos\varphi}$ б) $\rho=\sin(2\varphi-\frac{\pi}{2})$ (двухлепестковая роза)
6. а) $\rho=\dfrac{4}{3-3\cos\varphi}$ б) $\rho=\cos(2\varphi-\frac{\pi}{2})$ (двухлепестковая роза)
7. а) $\rho=\dfrac{0,5}{1-\cos\varphi}$ б) $\rho=-\sin(2\varphi)$ (двухлепестковая роза)
8. а) $\rho=\dfrac{1}{3-4\cos\varphi}$ б) $\rho=-\cos(2\varphi)$ (двухлепестковая роза)
9. а) $\rho=\dfrac{\sqrt{2}}{1-\cos\varphi}$ б) $\rho=\sin(\frac{\pi}{2}-3\varphi)$ (трехлепестковая роза)
10. а) $\rho=\dfrac{1}{2-\cos\varphi}$ б) $\rho=\cos(\frac{\pi}{2}-3\varphi)$ (трехлепестковая роза)
11. а) $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos\varphi}$ б) $\rho=\sin(\pi+3\varphi)$ (трехлепестковая роза)
12. а) $\rho=\dfrac{1}{3-\cos\varphi}$ б) $\rho=\cos(\pi+3\varphi)$ (трехлепестковая роза)
13. а) $\rho=\dfrac{1}{3-3\cos\varphi}$ б) $\rho=|\sin(2\varphi)|$ (четырехлепестковая роза)
14. а) $\rho=\dfrac{1}{1-2\cos(-\varphi)}$ б) $\rho=|\cos(2\varphi)|$ (четырехлепестковая роза)

15. а) $\rho = \dfrac{1}{2-5\cos\varphi}$ б) $\rho = 2\sin(\pi-\varphi)$ (окружность)

16. а) $\rho = \dfrac{\sqrt{3}}{2-2\cos\varphi}$ б) $\rho = 3\cos(\pi-\varphi)$ (окружность)

17. а) $\rho = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}\cos\varphi}$ б) $\rho = \dfrac{2}{\sin(\varphi-\pi)}$ (прямая)

18. а) $\rho = \dfrac{\sqrt{3}}{1-\cos\varphi}$ б) $\rho = \dfrac{3}{\cos(\varphi+\pi)}$ (прямая)

19. а) $\rho = \dfrac{1}{1-\sqrt{3}\cos\varphi}$ б) $\rho = |\frac{1}{\sin\varphi}|$ (пара прямых)

20. а) $\rho = \dfrac{1}{2-2\cos(-\varphi)}$ б) $\rho = |\frac{1}{\cos\varphi}|$ (пара прямых)

21. а) $\rho = \dfrac{2}{1-2\cos\varphi}$ б) $\rho = \dfrac{1}{\cos(\varphi-\frac{\pi}{6})}$ (прямая)

22. а) $\rho = \dfrac{2}{3-2\cos\varphi}$ б) $\rho = \dfrac{1}{\sin(\varphi-\frac{\pi}{6})}$ (прямая)

23. а) $\rho = \dfrac{2}{3-\cos\varphi}$ б) $\rho = \dfrac{1}{\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})}$ (прямая)

24. а) $\rho = \dfrac{1}{4-\cos\varphi}$ б) $\rho = \dfrac{1}{\sin(\varphi-\frac{\pi}{4})}$ (прямая)

25. а) $\rho = \dfrac{2}{2-3\cos\varphi}$ б) $\rho = 1+\sin(2\varphi)$
(перейти к половинному углу)

26. а) $\rho = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\cos(-\varphi)}$ б) $\rho = 1+\cos(2\varphi)$
(перейти к половинному углу)

27. а) $\rho = \dfrac{2}{3-4\cos\varphi}$ б) $\rho = 1+\sin(3\varphi)$
(перейти к половинному углу)

28. а) $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos\varphi}$ б) $\rho = 1+\cos(3\varphi)$
(перейти к половинному углу)

29. а) $\rho = \dfrac{2}{1+\cos(\pi-\varphi)}$ б) $\rho = 1+\cos\varphi$
(перейти к половинному углу)

30. а) $\rho = \dfrac{2}{2-5\cos\varphi}$ б) $\rho = 1-\cos\varphi$
(перейти к половинному углу).

Приложение. Некоторые теоретические сведения и формулы

1. Комплексные числа

1.1. Комплексное число в алгебраической форме записи имеет вид $z = a + bi$, где a, b — действительные числа, а i — мнимая единица, обладающая тем свойством, что $i^2 = -1$. Числа a и b называются действительной и мнимой частью числа z соответственно:

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z. \tag{1.1}$$

Множество всех комплексных чисел обозначают $\mathbb{C}$. Основные арифметические действия с комплексными числами можно производить по обычным правилам, заменяя при необходимости i^2 на -1.

Если $z = a + bi$, то число $\overline{z} = a - bi$ называется (комплексно) сопряженным к числу z. Поскольку $z \cdot \overline{z}$ — число действительное, при делении комплексных чисел принято домножать делимое и делитель на число, сопряженное делителю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}.$$

1.2. Комплексное число $z = a + bi$ изображается на комплексной плоскости как точка $M(a, b)$ или вектор $\overline{OM}(a, b)$ (см. рис. 24).

Длина вектора $\overline{OM}$ называется модулем числа z. Она обозначается $r = |z|$. Угол, образованный вектором $\overline{OM}$ и положительным направлением действительной оси, называется аргументом числа z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Аргумент комплексного числа определяется с точностью до периода 2π. У числа $z = 0$ аргумент не определен, а модуль равен нулю. Справедливы соотношения:

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\operatorname{Arg} z = \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} (+2\pi n) & \text{в I и IV четв.} \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} (+2\pi n) & \text{во II и IV четв.,} \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1.2}$$

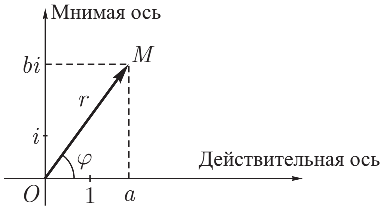

Рис. 24.

Наоборот,

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.3}$$

1.3. Комплексное число в тригонометрической форме записи имеет вид

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1.4}$$

где $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Справедливы следующие формулы:[3]

$$\begin{gathered} z_1 z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)); \\ z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}; \\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2\ldots n-1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Таким образом, существует ровно n различных корней степени n из числа z. Соответствующие им точки лежат в вершинах правильного n-угольника.

1.4. При решении уравнений, содержащих комплексные числа, полезно знать, что эквивалентны следующие системы:

$$\begin{gathered} z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2; \end{cases} \\ z_1 = z_2 \neq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{gathered} \tag{1.6}$$

[3]Последние два равенства принято называть формулами Муавра.

1.5. Корни n-й степени из единицы обозначаются ε_k, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, и имеют вид

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}. \tag{1.7}$$

Число ε_k называется первообразным корнем степени n из единицы, если

1) $\varepsilon_k^n = 1$,
2) для всех натуральных m, $0 < m < n$, $\varepsilon_k^m \neq 1$.

Число $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ будет первообразным корнем степени n из единицы тогда и только тогда, когда числа k и n взаимно просты (дробь $\frac{k}{n}$ несократима). Если же дробь $\frac{k}{n}$ равна несократимой дроби $\frac{k_1}{n_1}$, то ε_k — первообразный корень степени n_1.

1.6. Круговой многочлен $X_n(t)$ — это произведение вида

$$X_n(t) = (t-\varepsilon_{i_1})(t-\varepsilon_{i_2})\ldots(t-\varepsilon_{i_m}), \tag{1.8}$$

где $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}\ldots\varepsilon_{i_m}$ — все первообразные корни степени n из единицы.

2. Целые числа

2.1. Для любых двух целых чисел a и b ($b \neq 0$) можно единственным образом подобрать такие целые числа q и r, чтобы

$$\begin{aligned} &1)\ a = b\cdot q + r,\\ &2)\ 0 \leqslant r < |b|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Число q называется неполным частным, а число r — остатком от деления числа a на число b. Если остаток $r = 0$, то говорят, что

a (нацело) делится на b ($a \,\vdots\, b$) или b делит a ($b \backslash a$).

Число d называется наибольшим общим делителем чисел a и b ($d =$ НОД(a,b)), если d делит оба эти числа и делится на любой другой их общий делитель. Если НОД$(a,b) = 1$, то числа a и b называются взаимно простыми. У любых двух отличных от нуля целых чисел можно единственным образом (с точностью до знака) найти наибольший общий делитель. Для этого можно использовать алгоритм

Евклида, то есть последовательно осуществлять деление с остатком по такой схеме:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_1 + r_1, \\ b &= r_1 \cdot q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3, \\ &\dots \\ r_{k-2} &= r_{k-1} \cdot q_k + r_k, \\ r_{k-1} &= r_k \cdot q_{k+1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

В конце концов получается пара чисел, делящихся нацело. Тогда последний отличный от нуля остаток и равен наибольшему общему делителю чисел a и b:

$$r_k = \text{НОД}(a, b).$$

Рассматривая равенства (2.2) в обратном порядке, от предпоследнего к первому, можно выразить НОД(a, b) через числа a и b, получив линейное представление наибольшего общего делителя:

$$\text{НОД}(a, b) = a \cdot u + b \cdot v, \quad u, v \in Z. \tag{2.3}$$

2.2. Целое число p называется простым, если у него есть ровно четыре делителя: ± 1 и $\pm p$. Отличное от нуля целое число называется составным, если оно имеет больше четырех делителей. Числа 0 и ± 1 не являются ни простыми, ни составными. Можно доказать, что простых чисел бесконечно много (теорема Евклида). Кроме того, справедлива следующая основная теорема арифметики.

Любое составное число a можно единственным образом (с точностью до перестановки сомножителей) представить в виде

$$a = \pm p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}, \tag{2.4}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — положительные простые числа, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — натуральные числа, а знак $+$ или $-$ совпадает со знаком числа a.

2.3. Пусть m — натуральное число, $m > 1$. Говорят, что целые числа a и b сравнимы по модулю m:

$$a \equiv b \pmod{m}, \tag{2.5}$$

если $(a - b) \vdots m$. Иначе говоря, числа a и b при делении на m дают одинаковые остатки. Свойства сравнений типа (2.5) похожи на свойства равенств: к обеим частям сравнения можно добавить одну и ту же константу, можно умножить обе части на константу:

$$
\begin{aligned}
&a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m},\\
&a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Сравнения по одному и тому же модулю можно складывать, вычитать и умножать:

$$
\begin{cases} a_1 \equiv b_1 \pmod{m} \\ a_2 \equiv b_2 \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \pm a_2 \equiv b_1 \pm b_2 \pmod{m} \\ a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m}. \end{cases} \tag{2.7}
$$

2.4. Все числа, дающие при делении на m один и тот же остаток, объединяются в класс вычетов по модулю m:

$$
\overline{a} = \{x \in \mathbb{Z}\colon x \equiv a \pmod{m}\}. \tag{2.8}
$$

Для каждого натурального числа m можно указать ровно m различных классов вычетов по модулю m:

$$
\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}.
$$

Они образуют множество классов вычетов, которое обозначается $\mathbb{Z}_m$. Число, входящее в класс вычетов $\overline{a}$, называется представителем этого класса. Выполняя арифметические операции над классами вычетов, можно перейти к любым представителям этих классов, а затем найти остаток от деления на m.

2.5. Сравнение первой степени с одним неизвестным имеет вид:

$$
a \cdot x \equiv b \pmod{m}, \tag{2.9}
$$

где x неизвестно, a, b, m — данные целые числа ($m > 1$). Если НОД$(a, m) = 1$, то сравнение (2.9) имеет единственное решение в множестве классов вычетов $\mathbb{Z}_m$ (на множестве целых чисел ему соответствует бесконечно много представителей соответствующего класса вычетов). Это решение можно найти путем подбора. Если же НОД$(a, m) = d$ и b не делится на d, то сравнение (2.9) не имеет решений. Если же b делится на d, то следует перейти к вспомогательному сравнению

$$
a_1 \cdot x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \tag{2.10}
$$

где $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$, $m = m_1 \cdot d$. Сравнение (2.10) имеет единственное решение $\overline{x}_0$ в Z_{m_1}. Ему соответствует d различных решений в Z_m:

$$
\overline{x}_0,\ \overline{x_0 + m_1},\ \overline{x_0 + 2m_1}, \ldots, \overline{x_0 + (d-1)m_1}. \tag{2.11}
$$

2.6. Диофантовы уравнения первой степени с двумя неизвестными имеют вид

$$ax + by = c, \quad a, b, c \in Z. \tag{2.12}$$

Неизвестные x и y также предполагаются целыми. Если НОД$(a, b) = 1$ и пара чисел (x_0, y_0) — это одно из решений уравнения (2.12), то общее решение можно записать в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, \end{cases} \quad t \in Z. \tag{2.13}$$

Если НОД$(a, b) = d$ и c не делится на d, то уравнение (2.12) не имеет решений в целых числах. Если же c делится на d, то следует разделить обе части (2.12) на d и решать полученное уравнение, эквивалентное исходному.

3. Многочлены

3.1. Пусть K — некоторое множество, в котором можно осуществлять операции сложения и умножения. Сумма вида

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \tag{3.1}$$

где все $a_i \in K$, а x понимается как некоторая переменная, называется многочленом от переменной x с коэффициентами из K. Множество всех таких многочленов обозначается $K[x]$. Чаще всего рассматривают множества $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x]$. Коэффициент a_0 называется старшим коэффициентом многочлена (3.1), а коэффициент a_n — его свободным членом. Если $a_0 = 1$, то многочлен называется приведенным.

Степень многочлена $f(x)$ обозначается $\deg f(x)$ и определяется следующим образом:

$$\deg f(x) = \begin{cases} n, & \text{если } f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) = a \neq 0, \\ -\infty, & \text{если } f(x) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Степень многочлена обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \deg(f(x) + g(x)) \leqslant \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}, \\ \deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Два многочлена называются равными, если совпадают их степени и коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях переменной x:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \deg f(x) = \deg g(x), \\ a_i = b_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$, $g(x) = b_0x^m + \ldots + b_m$.

Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$, где $g(x) \neq 0$, можно единственным образом подобрать такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, чтобы

$$\begin{aligned} &1) \quad f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \\ &2) \quad \deg r(x) < \deg g(x). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Многочлен $q(x)$ называется неполным частным, а многочлен $r(x)$ — остатком от деления $f(x)$ на $g(x)$. Все свойства, связанные с делимостью целых чисел (см. 2.1), можно обобщить на случай многочленов. Основное отличие состоит в том, что НОД многочленов определен с точностью до умножения на ненулевую константу, поэтому многочлены, возникающие при использовании алгоритма Евклида, можно умножать на любые отличные от нуля константы.

3.2. Пусть K — некоторое числовое множество ($\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ или какое-то их подмножество). Число c называют корнем многочлена $f(x)$, если $f(c) = 0$ (то есть, подставляя в (3.1) вместо переменной x число c и вычисляя возникающую сумму, мы получаем 0). Справедлива теорема Безу: число c будет корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ нацело делится на $(x - c)$:

$$f(c) = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x - c) \cdot g(x). \tag{3.6}$$

Если многочлен $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = (x - c)^k g(x), \quad \text{где } g(c) \neq 0, \tag{3.7}$$

то говорят, что число c — это корень многочлена $f(x)$ кратности k. Если $k = 1$, то корень называется простым. Если $k = 0$, то c не является корнем многочлена $f(x)$.

Корень кратности $k > 0$ для многочлена $f(x)$ является корнем кратности $k - 1$ для его производной $f'(x)$.

Если $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ (то есть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами) и комплексное число $c = \alpha + \beta i$ — корень $f(x)$ кратности k, то и сопряженное комплексное число $\overline{c} = \alpha - \beta i$ будет корнем $f(x)$ той же самой кратности k. Иначе говоря, если $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, то его комплексные корни образуют взаимно сопряженные пары.

Определение корня и кратного корня можно обобщить и на случай $f(x) \in K[x]$, где K — произвольное множество с операциями сложения и умножения, содержащее нуль, то есть такой элемент $e \in K$, чтобы

$$a + e = e + a = a \quad \text{для всех } a \in K.$$

В частности, в качестве множества K можно рассматривать Z_n, в котором роль нуля играет класс вычетов $\overline{0}$.

3.3. Справедлива основная теорема алгебры: если $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ($f(x)$ — многочлен с комплексными коэффициентами) и $\deg f(x) > 0$, то существует такое число $\alpha \in \mathbb{C}$, что $f(\alpha) = 0$.

Иначе говоря, у любого многочлена с комплексными коэффициентами, отличного от константы, есть хотя бы один комплексный корень. Более того, можно доказать, что количество корней, взятых с учетом кратности, совпадает со степенью многочлена $f(x)$.

Любой отличный от константы многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ можно разложить на линейные множители, то есть представить в виде

$$f(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m}. \tag{3.8}$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — корни многочлена $f(x)$ кратности $k_1, k_2 \ldots k_m$ соответственно, причем $k_1 + k_2 + \ldots k_m = \deg f(x)$. Число a_0 — старший коэффициент многочлена $f(x)$.

Если $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ (имеет действительные коэффициенты), то его можно разложить на множители первой и второй степени с действительными коэффициентами:

$$f(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \ldots (x-x_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \ldots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}. \tag{3.9}$$

Здесь a_0 — старший коэффициент многочлена $f(x)$, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — его действительные корни кратности $k_1, k_2, \ldots, k_m$ соответственно. Каждый множитель $(x^2+p_jx+q_j)$ — это многочлен с действительными коэффициентами, не имеющий действительных корней ($p_j^2 - 4q_j < 0$). Ему соответствует пара сопряженных комплексных корней $c_j = \alpha_j + i\beta_j$ и $\overline{c}_j = \alpha_j - i\beta_j$ кратности l_j. Выполняется равенство

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m + 2l_1 + \ldots + 2l_s = \deg f(x). \tag{3.10}$$

3.4. Многочлен $f(x)$ называется приводимым на множестве K, если $f(x)$ можно разложить на множители — многочлены положительной степени — с коэффициентами из K. Если этого сделать нельзя, то говорят, что $f(x)$ неприводим над K. Решая вопрос о приводимости многочленов, можно использовать следующие правила.

1. Если $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ и $\deg f(x) > 1$, то $f(x)$ приводим над $\mathbb{C}$. Если $\deg f(x) \leqslant 1$, то $f(x)$ неприводим над $\mathbb{C}$.

2. Если $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и $\deg f(x) \geqslant 2$, то $f(x)$ приводим над $\mathbb{R}$. Если $\deg f(x) = 2$ и дискриминант соответствующего квадратного уравнения $D \geqslant 0$, то $f(x)$ приводим над $\mathbb{R}$. Во всех остальных случаях $f(x)$ неприводим над $\mathbb{R}$.

3. Если $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ и у многочлена $f(x)$ есть рациональный корень, то $f(x)$ приводим над $\mathbb{Q}$.

4. (Критерий Эйзенштейна.) Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in Z$. Пусть существует такое простое число p, для которого

а) a_0 не делится на p;

б) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ делятся на p;

в) a_n не делится на p^2.

Тогда $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

Следует заметить, что правила 3 и 4 не всегда позволяют разрешить вопрос о приводимости многочлена $f(x)$ над $\mathbb{Q}$. Иногда для ответа на этот вопрос требуется дальнейшее исследование.

3.5. Отделить кратные корни многочлена $f(x)$ означает построить многочлен $f_1(x)$, имеющий те же самые корни, что и $f(x)$, но первой кратности. Если НОД$(f(x), f'(x)) = d(x)$, то в качестве $f_1(x)$ можно рассмотреть многочлен $\dfrac{f(x)}{d(x)}$. Он обладает всеми необходимыми свойствами. В частности, если НОД$(f(x), f'(x)) = \mathrm{const}$, то и сам многочлен $f(x)$ не имеет кратных корней.

3.6. Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ — многочлен, не имеющий кратных корней. Построим систему многочленов $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ по следующим правилам:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= f(x),\\
f_1(x) &= f'(x),\\
f_0(x) &= f_1(x)q_1(x) - f_2(x),\\
f_1(x) &= f_2(x)q_2(x) - f_3(x),\\
&\ldots\\
f_{k-2}(x) &= f_{k-1}(x)q_{k-1}(x) - f_k(x),\\
f_{k-1}(x) &= f_k(x)q_k(x).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь каждое $f_j(x)$, $j \geqslant 2$, — это остаток от деления многочлена $f_{j-2}(x)$ на $f_{j-1}(x)$, взятый с обратным знаком.

Система многочленов, удовлетворяющих равенствам (3.11), называется системой Штурма многочлена $f(x)$.

Рассмотрим набор чисел

$$f_0(a), f_1(a), \ldots, f_k(a). \tag{3.12}$$

Вычеркнув числа, равные нулю, сосчитаем, сколько раз нам встретятся пары соседних чисел, имеющих разные знаки. Тем самым мы найдем число перемен знака в системе Штурма многочлена $f(x)$ при $x = a$. Оно обозначается $W(a)$. Справедлива следующая теорема Штурма.

Разность $W(a) - W(b)$ равна количеству действительных корней многочлена $f(x)$, лежащих на отрезке $[a, b]$.

С помощью теоремы Штурма можно отделять действительные корни многочлена $f(x)$, то есть найти такие непересекающиеся отрезки $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots, [a_m, b_m]$, на каждом из которых многочлен $f(x)$ имеет ровно один корень.

Литература

[1] П. С. Александров. Лекции по аналитической геометрии. — М: Наука, 1968.
[2] Д. В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М: Наука, 1971.
[3] Л. А. Кузнецов. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — М: Высшая школа, 1983.
[4] А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. — М: Наука, 1971.
[5] В. П. Минорский. Сборник задач по высшей математике. — М: Наука, 1987.
[6] М. М. Постников. Аналитическая геометрия. — М: Наука, 1986.
[7] М. М. Постников. Линейная алгебра. — М: Наука, 1986.
[8] А. С. Солодовников и др. Математика в экономике. — М.: Финансы и статистика, 1998.
[9] Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. — М: Наука, 1972.
[10] Д. К. Фаддеев. Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.
[11] В. В. Шуликовская. Лекции по алгебре. Векторные пространства, линейные операторы и квадратичные формы. — Ижевск: ООО Информационно-издательский центр "БонАнца", 2009.

Шуликовская Валентина Валентиновна

Руководство к решению задач по алгебре и геометрии

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка С. В. Высоцкий
Корректор Г. Г. Тетерина

Подписано в печать 04.05.2016. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 7,56. Уч. изд. л. 6,22.
Гарнитура Таймс.