Шуликовская В. В.

Теория игр

Учебное пособие

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию
в области математических методов в экономике в качестве учебного
пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по
специальности 080116 «Математические методы в экономике»
и другим экономическим специальностям

Ижевск
2009

УДК 519.8(075)
ББК 22.183.2я7
Ш 955

Рецензенты: к.э.н., профессор кафедры экономической кибернетики, проректор по учебной работе ИжГСХА *Акмаров П. Б.*; д.ф.-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений, декан математического факультета УдГУ *Петров Н. Н.*

Шуликовская В. В.
Теория игр. Ижевск: ООО Информационно-издательский центр «Бон Анца», 2009. 304 с.

Данную книгу можно рассматривать не только как учебник, но и как руководство к решению задач по основным разделам теории игр. Наиболее подробно рассмотрены конечные игры с дискретным временем, как антагонистические, так и неантагонистические. Дается общее представление о бесконечных, дифференциальных и байесовских играх. Теоретические сведения сопровождаются большим количеством примеров, в которых по возможности раскрывается экономический смысл теоретико-игровых понятий. Для студентов экономико-математических и экономических специальностей. Может быть рекомендована студентам математических специальностей для первоначального знакомства с теорией игр.

Табл. 27. Ил. 67. Библ. 18.

ISBN 978-5-903140-35-0 (ООО ИИЦ «Бон Анца»)

Оглавление

Предисловие

Данная книга написана на основе курса лекций, прочитанных студентам специальности «Математические методы в экономике» Удмуртского государственного университета, и предназначена прежде всего тем студентам, специализация которых предполагает знакомство с построением и исследованием математических моделей. Следует особо подчеркнуть, что при обучении студентов математических специальностей данная книга может играть только вспомогательную роль, поскольку собственно математическая часть в ней изложена достаточно сжато. В частности, такие наиболее сложные разделы теории игр, как бесконечные и дифференциальные игры, представлены очень кратко, в ознакомительном порядке, большая часть утверждений формулируется, но не доказывается, а доказательства проводятся только в тех случаях, когда это помогает читателю лучше понять идеи, лежащие в основе алгоритмов решения задач, либо позволяет вспомнить какие-то необходимые в дальнейшем сведения из высшей математики. Наоборот, студенты гуманитарных специальностей могут ограничиться чтением глав 1 5, 11 и 14.

Основная задача данного курса, помимо знакомства с алгоритмами решения наиболее известных классов задач, состоит в том, чтобы дать читателю представление о применении игровых методов в математическом моделировании и, более широко, о проблемах, возникающих при принятии решений в условиях неопределенности. Поэтому, в частности, в данной книге рассмотрены игры с природой, хотя они и не относятся собственно к теории игр.

Вопросы и задания к главам подобраны с таким расчетом, чтобы продемонстрировать читателю как чисто математические трудности, возникающие при использовании изучаемых алгоритмов (задачи с параметрами, случаи вырождения, обобщение алгоритма для задач большей размерности), так и связь этих алгоритмов с особенностями различного рода моделей. Некоторые примеры нужны для того, чтобы можно было понять роль математического моделирования, его место в решении задач, относящихся к разным областям человеческой деятельности, оценить как преимущества математических моделей, так и их ограниченность. Большая часть предлагаемых примеров и задач традиционно связана с экономическими моделями, но некоторые примеры взяты из биологии (игровые модели теории эволюции) и социологии. Ответы даны лишь к некоторым задачам вычислительного характера. Многие вопросы допускают неоднозначные ответы и могут служить предметом дискуссии. Вместе с тем типовых заданий, направленных на отработку основных алгоритмов, в книге относительно немного, поэтому для закрепления соответствующих навыков необходимо обратиться к другим учебным пособиям.

При написании книги предполагалось, что читатель будет знаком с высшей математикой и теорией вероятностей, хотя бы в объеме гуманитарных специальностей. Желательно, но не обязательно знакомство с теорией графов и с линейным программированием.

Глава 1
Введение

Составляя математические модели, необходимо принимать во внимание много различных факторов, которые будут влиять как на свойства модели, так и на ее адекватность изучаемой системе. Одним из этих факторов служит степень нашей информированности о параметрах системы. В наиболее простых случаях нам известно, какое значение принимает каждый из параметров и как он будет меняться с течением времени. Возможно, для оценки параметров нам придется решать достаточно сложные вычислительные задачи, может быть, мы не станем требовать большой точности и ограничимся приближенными ответами. Важно то, что в принципе мы всегда сможем изучить поведение системы полностью. Если же в системе и присутствуют какие-то плохо поддающиеся оценке факторы, то их влияние настолько мало, что ими можно пренебречь. Модели такого типа принято называть *детерминированными*. Примером детерминированной модели служит задача о планировании производства в условиях стабильной экономики.

Модели второго типа отличаются от предыдущих тем, что в них возникают случайные факторы, предугадать значение которых невозможно в принципе (по крайней мере, при данном уровне развития науки и вычислительной техники). В этом случае стараются хотя бы оценить вероятность, с которой изучаемый параметр примет то или иное значение, то есть найти закон распределения соответствующей случайной величины. Если это удается сделать, то говорят, что мы действуем в условиях *статистической неопределенности*. Например, принято считать, что уровень спроса на тот или иной товар   это случайная величина, которая колеблется около известного среднего значения. Более того, чаще всего предполагают, что этой случайной величине соответствует нормальный закон распределения. Точно так же размер ущерба при пожаре или каком-то стихийном бедствии считается случайной величиной, которая с примерно одинаковой вероятностью может принять любое значение от нуля до полной стоимости объекта (равномерное распределение). В результате возникают так называемые *стохастические* модели, для исследования которых необходимо применять теорию вероятностей и теорию случайных процессов.

Наконец, третья разновидность моделей отличается тем, что в них неопределенность носит *стратегический* характер: поведение системы зависит не только от известных параметров и от наших действий, но и от действий других лиц, которые могут преследовать какие-то свои цели, не совпадающие с нашими. Говорят, что в этом случае возникает ситуация *конфликта.* В качестве примера можно привести различные модели поведения конкурирующих фирм в условиях олигополии, когда действия одной фирмы оказывают существенное влияние и на объемы продаж, и на цену товара, и на издержки других фирм. Математические модели подобных ситуаций принято называть *играми.* Раздел математики, в котором изучаются свойства данных моделей, называется *теорией игр.* Отметим, что в отличие от конфликтологии, изучающей прежде всего психологические аспекты конфликтных ситуаций, теория игр имеет дело только с такими моделями, в которых все действующие лица (*участники конфликта или игроки*) принимают *осмысленные, разумные решения*, рассчитывают свое поведение таким образом, чтобы извлечь как можно большую выгоду для себя. Впрочем, в некоторых случаях это требование ослабляют или существенно модифицируют. Например, в игровых моделях теоретической биологии в качестве игроков могут выступать животные, способные к зачаткам разумной деятельности (игры «хищник жертва», борьба за территорию). Более того, в игровых моделях теории эволюции «игроками» служат отдельные биологические виды или популяции, а «выигрыш» выражается в так называемом воспроизводственном успехе, то есть в ожидаемой численности потомства, которое доживет до репродуктивного возраста. Здесь поведение «игроков», как правило, предопределено их генотипом и инстинктом самосохранения (как на индивидуальном, так и на коллективном уровне), то есть разумным, строго говоря, не является. Аналогичная проблема возникает в тех моделях, где в качестве игроков выступают большие группы людей: отдельные слои общества, этносы, нации. Чаще всего эти группы преследуют вполне очевидные цели, хотя отдельные представители групп могут этого не осознавать, да и указать конкретный механизм принятия решений бывает достаточно сложно.

Другое требование, которое чаще всего предъявляется к игровым моделям, состоит в том, что каждый участник конфликта (игрок) должен понимать, что результаты его деятельности будут зависеть от поведения других игроков. Кроме того, ему известны все участники конфликта и все возможные варианты их поведения (*стратегии*). Это в определенной степени роднит теорию игр с разделами математики, изучающими детерминированные модели. В то же время, как мы увидим в дальнейшем, в теории игр широко применяются и вероятностные методы.

Промежуточное положение между моделями второго и третьего типа занимают так называемые *игры с природой.* Они возникают тогда, когда поведение системы зависит от воздействия случайного фактора, *закон распределения которого невозможно оценить.* Единственное, что нам известно, это набор значений, которые может принять соответствующая случайная величина. Обычные методы теории вероятностей к играм с природой практически неприменимы, и критерии, по которым приходится принимать решения, во многом похожи на критерии, использующиеся в теории игр. Отличие игр с природой от обычных игр состоит в том, что вместо разумного, преследующего свои цели участника конфликта в качестве одного из игроков выступает случайный фактор природа, а про нее нельзя сказать, что она намеренно действует против нас или стремится извлечь из ситуации максимальную выгоду для себя. Иногда игры с природой также относят к предмету теории игр. В этом случае теорию игр можно определить как «теорию математических моделей принятия решений в *условиях неопределенности,* когда принимающий решение субъект («игрок») располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он в действительности находится, о множестве решений («стратегий»), которые он может принять, и о количественной мере того «выигрыша», который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию»[1]. В этом определении предполагается, что ситуация, в которую попадает игрок, зависит от действий других игроков или от поведения природы. В любом случае мы не можем выдвинуть какие-либо гипотезы о вероятности той или иной ситуации.

В заключение приведем пример, показывающий, с какими сложностями приходится сталкиваться при построении и исследовании модели конфликтной ситуации, выбрав с этой целью широко известную модель олигополии Курно.

Пример 1.1 (Задача о дуополии). Предположим, что прибыль двух конкурирующих фирм можно записать по формуле

$$\Pi_i = X_i \cdot (A - (X_1 + X_2)), \quad i = 1,\, 2, \tag{1.1}$$

где Π_i обозначает прибыль i-й фирмы, а X_i количество продукции, выпускаемой i-й фирмой. Мы видим, что прибыль каждой из фирм

[1]Воробьев Н. Н. Философская энциклопедия. Т. 5. М: 1970. С. 208 210. Цит. по [17].

зависит от действий конкурента. Это происходит хотя бы потому, что цена на продукцию должна снижаться с увеличением объема выпуска.

Теперь допустим, что вторая фирма рассчитывает объем выпускаемой продукции, ориентируясь на действия конкурентов, то есть

$$X_2 = f_2(X_1),$$

где f_2 некоторая функция. Тогда, решая уравнение $\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_1} = 0$, легко увидеть, что первая фирма должна выпускать продукцию в объеме

$$X_1^* = \frac{A - X_2}{2 + f_2'(X_1)}, \tag{1.2}$$

это обеспечит ей максимальную прибыль. Точно так же

$$X_2^* = \frac{A - X_1}{2 + f_1'(X_2)} \tag{1.3}$$

оптимальный выпуск второй фирмы. Получается, что фирмы, планируя свою деятельность, должны принимать во внимание не только предполагаемый объем выпуска продукции у конкурентов, но и мнение конкурентов на свой счет (вид функций f_1 и f_2). Из-за этого оценить возможные стратегии противника становится очень сложно.

Например, каждая из фирм может предположить, что конкуренты планируют свой выпуск независимо от действий другой фирмы. Это означает, что $f_1'(X_2) = f_2'(X_1) = 0$, и формулы (1.2) (1.3) превращаются в

$$\begin{cases} X_1^* = \dfrac{A - X_2}{2}, \\ X_2^* = \dfrac{A - X_1}{2}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Решая возникающую систему уравнений, находим, что $X_1^* = X_2^* = \dfrac{A}{3}$. Заметим, что в действительности

$$\begin{aligned} f_1(X_2) &= \frac{1}{2}(A - X_2), \\ f_2(X_1) &= \frac{1}{2}(A - X_1), \end{aligned} \tag{1.5}$$

то есть гипотезы обеих фирм о поведении конкурентов были неверны.

Пусть теперь обе фирмы предполагают, что конкуренты будут руководствоваться формулами (1.4). Подставляя формулы (1.5) в равенства (1.2) и (1.3), приходим к системе

$$\begin{aligned} X_1^* &= \frac{A - X_2}{\frac{3}{2}}, \\ X_2^* &= \frac{A - X_1}{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

откуда $X_1^* = X_2^* = \frac{2}{5}A$. Заметим, что на этот раз

$$\begin{aligned} f_1(X_2) &= \frac{2}{3}(A - X_2), \\ f_2(X_1) &= \frac{2}{3}(A - X_1), \end{aligned} \tag{1.7}$$

то есть гипотезы обеих фирм опять неверны. Кроме того, хотя конкуренты, казалось бы, проявили большую дальновидность в своих рассуждениях, чем в первый раз, их прибыль, как легко показать, будет меньше.

Точно так же можно предположить, что конкуренты будут руководствоваться формулами (1.6), и на основании этих формул получить новый ответ. Подобные рассуждения можно продолжать до бесконечности. (Заметим также, что возникающая здесь последовательность ответов сходится к $X_1 = X_2 = \frac{A}{2}$ выпускам, которые обеспечивают нулевую прибыль.)

Вопросы и задания

1. Можно ли рассматривать следующие ситуации как ситуации конфликта?

а) Руководство предприятия составляет бизнес-план, стремясь к достижению следующих целей: повысить прибыль от продажи своего товара, увеличить объемы производства, снизить налоги, увеличить заработную плату сотрудников, повысить экологическую безопасность производства, снизить себестоимость продукции, увеличить надежность своего предприятия, чтобы привлечь больше инвесторов. Каждый из руководителей по-разному оценивает значимость каждого из этих требований, но все они понимают, что ради достижения одной цели придется пожертвовать чем-то другим.

б) Архитектор, который готовит проект здания, старается совместить инженерные требования (то есть обеспечить надежность сооружения) с требованиями эстетическими (архитектурный стиль, соответствие пейзажу и общему плану застройки).

в) Семья решает, как провести выходные. Предполагается, что отдых должен быть совместным, но разные члены семьи предпочитают разные виды отдыха.

г) Хищник охотится за жертвой.

д) Политические партии ведут предвыборную борьбу.

е) Фирмы, производящие одинаковую продукцию, ищут рынок сбыта для своего товара.

ж) Два химических вещества участвуют в окислительно-восстановительной реакции.

з) Два игрока играют в шахматы.

и) Популяция, характеризуемая определенным генотипом, живет в стохастической среде обитания. (Это означает, что свойства окружающей среды: погода, наличие пищи и естественных врагов могут непредсказуемо изменяться.)

В конфликтных ситуациях укажите участников конфликта и возможные варианты их поведения.

2. Как вы думаете, в каких моделях более оправдано применение методов теории игр: экономических (в моделях свободного рынка, олигополии или монополии), биологических, физических, социологических, метеорологических, химических, астрономических? В каких из перечисленных выше моделей могут возникнуть игры с природой?

3. В каких случаях можно говорить о том, что решение принимается в условиях неопределенности?

а) Инвестор решает, акции какой компании ему следует предпочесть.

б) Покупатель выбирает товар в магазине.

в) Командующий фронтом выдвигает войска в районы наиболее вероятной атаки противника.

г) Представитель страховой компании определяет размер страхового взноса при оформлении полиса.

д) Врач ставит диагноз пациенту.

е) Посетитель казино решает, на какое число он будет делать ставку.

ж) Вкладчик Сбербанка выбирает, в какой валюте он будет хранить свои сбережения.

з) Врач-генетик оценивает вероятность наследственного заболевания у будущего ребенка данной супружеской пары.

4. Представители неоклассицизма при построении экономических моделей использовали так называемый *методологический индивидуализм*, а именно, они считали, что любой феномен общественной жизни представляет собой результат взаимодействия рациональных индивидуумов, выбирающих наилучшие для себя альтернативы в какой-либо ситуации. Как Вы считаете, можно ли исследовать неоклассические модели методами теории игр?

Ответьте на аналогичный вопрос для других известных Вам экономических учений.

5. В некоторых работах, посвященных изучению игр, все игры принято делить на следующие три категории.

1) Комбинаторные игры, в которых предсказать развитие событий в принципе возможно, но очень сложно, поскольку для этого необходимо перебирать огромное количество комбинаций (шахматы и шашки, если предполагать, что оба игрока способны однозначно определить наиболее выгодный для себя ход).

2) Азартные игры, в которых выигрыши зависят только от случайных факторов (игра в кости, некоторые виды карточных игр, когда исход игры зависит только от расклада карт).

3) Стратегические игры, в которых невозможность заранее предсказать исход возникает из-за непрогнозируемых действий другого участника.

Как Вы считаете, все ли перечисленные здесь категории игр могут служить предметом изучения в теории игр?