Шуликовская В. В.

Предел, дифференцирование, исследование функций

(методические указания
по математическому анализу)

бакалаврам направления
«Бизнес-информатика»

Ижевск
2015

ББК 22.161р30
УДК 517(07)

Пособие содержит варианты индивидуальных заданий по математическому анализу, предназначенные для студентов первого курса направления «Бизнес-информатика», а также примеры решения задач, идентичных индивидуальным заданиям.

Контрольная работа по математическому анализу выполняется студентами дома, в часы, отведенные для самостоятельной работы. Она представляет собой серию индивидуальных заданий, охватывающих всю тематику практических занятий, и по уровню сложности соответствует экзаменационным задачам. Студент, не сдавший контрольную работу, к экзамену не допускается. Задачи, входящие в данную работу, выполняются студентом в течение всего семестра по мере изучения материала, оформляются и сдаются преподавателю для проверки. Если какое-то из заданий решено неправильно, оно возвращается студенту для доработки. Полностью выполненная и проверенная работа хранится у студента. Она может быть использована при повторении пройденного материала во время подготовки к экзамену или при изучении дальнейших разделов математического анализа.

Примеры решения задач.

Работа № 1. Предел и непрерывность функции.

Задание 1. Сформулировать в логических символах утверждения

$$\text{а)} \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$
$$\text{б)} \quad \lim_{x\to a} f(x) \neq +\infty.$$

Решение. а) Напомним, что предел функции в точке определяется следующим образом:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|x-a| < \delta$ $(x \neq a)$ влечет за собой $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В логических символах это утверждение запишется так:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\colon |x-a| < \delta\ (x \neq a)\ \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Теперь вспомним, что запись $x \to a-0$ означает, что мы рассматриваем только те значения переменной x, которые меньше числа a. Как известно, $|x-a| < \delta$ тогда и только тогда, когда $x \in (a-\delta;\ a+\delta)$. Выбираем те значения x, которые меньше a (мы учли, что $x \neq a$): $x \in (a-\delta;\ a)$. Таким образом, утверждение $\lim\limits_{a\to a-0} f(x) = b$ в логических символах выглядит так:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\colon a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

б) Сначала запишем в логических символах утверждение

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Оно выглядит следующим образом:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\colon |x-a| < \delta\ (x \neq a)\ \Rightarrow f(x) > E.$$

(Мы учли, что $f(x)$ здесь величина положительная.)

Сформулируем это же утверждение словесно: для любого $E > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|x - a| < \delta$ $(x \neq a)$ влечет за собой $f(x) > E$.

Теперь построим отрицание этого утверждения. Если оно не выполняется для любого $E > 0$, то найдется хотя бы одно исключение, то есть существует такое $E > 0$, для которого оставшаяся часть утверждения не выполняется. Если необходимого нам $\delta > 0$ не существует, то это означает, что для всех $\delta > 0$ (при уже выбранном E) не выполняется тот факт, что $|x - a| < \delta$ $(x \neq a)$ влечет за собой $f(x) > E$. Иначе говоря, не при всех x таких, что $|x - a| < \delta$, верно, что $f(x) > E$. То есть найдется такое $x \neq a$, что $|x - a| < \delta$, но $f(x) < E$. Объединяя все вышесказанное, получаем следующее утверждение:

существует такое $E > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует такое $x \neq a$, что $|x - a| < \delta$, но $f(x) < E$.

Перепишем его с помощью логических символов.

$$\exists\, E > 0\colon \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x \neq a\colon |x - a| < \delta, \quad f(x) < E.$$

Задание 2. Пользуясь определением предела последовательности, доказать следующие утверждения:

1) Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность, а константа $c < 0$. Тогда $\left\{\dfrac{c}{x_n}\right\}$ — бесконечно малая положительная последовательность.

2) Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая, а $\{y_n\}$ — бесконечно малая положительные последовательности. Тогда $\{x_n + y_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

Решение. 1) Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность, то это означает, что

$$\forall\, E > 0 \quad \exists\, N\colon \forall\, n > N \quad |x_n| > E.$$

(Напомним, что N и n — это натуральные числа.) Если последовательность $\{x_n\}$ отрицательна, то все ее члены — отрицательные числа, и неравенство $|x_n| > E$ можно переписать как $-x_n > E$ (или $x_n < -E$). Учитывая, что ни x_n (при $n > N$), ни E не равны нулю, от неравенства $-x_n > E$ можно перейти к неравенству $-\dfrac{1}{x_n} < \dfrac{1}{E}$, поскольку $f(x) = \dfrac{1}{x}$ — функция убывающая и большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Если умножить обе части полученного неравенства на отрицательную константу c, оно изменит знак:

$$-\frac{c}{x_n} > \frac{c}{E}.$$

Умножая обе части на -1, получаем

$$\frac{c}{x_n} < -\frac{c}{E}.$$

Обозначим $\varepsilon = -\frac{c}{E}$. Заметим, что $\varepsilon > 0$ и, кроме того, когда E принимает все возможные положительные значения, ε тоже принимает все возможные положительные значения (это следует из свойств функции $f(x) = \frac{k}{x}$, $k > 0$). Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует соответствующее $E > 0$, для которого, в свою очередь, существует такое N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $x_n < -E$, а значит, и неравенство $\frac{c}{x_n} < -\frac{c}{E}$, то есть $\frac{c}{x_n} < \varepsilon$. Иначе говоря, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $\frac{c}{x_n} < \varepsilon$. Теперь заметим, что $\frac{c}{x_n} > 0$, и получаем определение бесконечно малой положительной последовательности:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N\colon \forall\, n > N \quad 0 < \frac{c}{x_n} < \varepsilon.$$

2) Запишем определения бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей:

$$\forall\, E > 0 \quad \exists\, N_1\colon \forall\, n > N_1 \quad |x_n| > E;$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_2\colon \forall\, n > N_2 \quad |y_n| < \varepsilon.$$

(Мы учли, что N_1 и N_2 — это, вообще говоря, разные числа.) Учитывая, что все x_n и y_n положительны, получаем:

$$\forall\, E > 0 \quad \exists\, N_1\colon \forall\, n > N_1 \quad x_n > E;$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_2\colon \forall\, n > N_2 \quad 0 < y_n < \varepsilon.$$

Теперь зафиксируем какое-то $E > 0$ и выберем $\varepsilon = \frac{E}{2}$. Нашим E и ε соответствуют какие-то N_1 и N_2. Обозначим $N = \max\{N_1;\, N_2\}$. Тогда $n > N$ означает, что $n > N_1$ и $n > N_2$, то есть выполняются неравенства как на x_n, так и на y_n. Иначе говоря, для нашего $E > 0$ мы нашли такое N, что для всех $n > N$ верна система неравенств:

$$\begin{cases} \quad x_n > E, \\ 0 < y_n < \dfrac{E}{2}. \end{cases}$$

Это означает, что $x_n + y_n$, по крайней мере, будет больше E. Таким образом,

$$\forall\, E > 0 \quad \exists\, N \colon \forall\, n > N \quad x_n + y_n > E,$$

а это и есть определение бесконечно большой положительной последовательности.

Задание 3. Доказать следующие утверждения:

1) $x \cdot \cos x = O(x)$, $x \to \infty$

2) $(2 - x)^{x+1} \sim 2$, $x \to 0$.

Решение. 1) Как известно, $f(x) = O(g(x))$ при $x \to \infty$, если существуют такие константы $E > 0$ и $M > 0$, что при $|x| > E$ верно неравенство $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < M$. В нашем случае $f(x) = x \cdot \cos x$, а $g(x) = x$. Отношение

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{x \cdot \cos x}{x}\right| = |\cos x| \leqslant 1$$

при всех действительных значениях x, что следует из свойств функции $y = \cos x$. Таким образом, в качестве константы M можно взять любое число, большее 1, например, $M = 2$. Тогда при всех x выполняется неравенство $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < M$, и в качестве E можно взять любое положительное число.

2) По определению эквивалентности $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

В нашем случае $f(x) = (2 - x)^{x+1}$, $g(x) = 2$, то есть

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(2 - x)^{x+1}}{2} = \frac{2^1}{2} = 1.$$

Задание 4. Пользуясь определением предела, доказать, что

а) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{2n^3}{n^3 - 2} = 2$,

б) $\displaystyle\lim_{x \to 1/3} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} = 8$.

Решение. а) Запишем определение предела последовательности:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \colon \forall\, n > N \quad \left|\frac{2n^3}{n^3 - 2} - 2\right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим разность

$$\frac{2n^3}{n^3-2}-2$$

и преобразуем ее:

$$\frac{2n^3}{n^3-2}-2=\frac{2n^3-2(n^3-2)}{n^3-2}=\frac{4}{n^3-2}.$$

Заметим, что при $n>1$ выражение $\frac{4}{n^3-2}$ положительно, поэтому неравенство

$$\left|\frac{2n^3}{n^3-2}-2\right|<\varepsilon$$

можно переписать как

$$\frac{4}{n^3-2}<\varepsilon.$$

Решим это неравенство, считая ε некоторой положительной константой (напомним, что у нас $n>1$ и $n^3-2>0$).

$$4<\varepsilon(n^3-2),$$

$$\frac{4}{\varepsilon}<n^3-2,$$

$$n^3-2>\frac{4}{\varepsilon},$$

$$n^3>\frac{4}{\varepsilon}+2,$$

$$n>\sqrt[3]{\frac{4}{\varepsilon}+2}.$$

Таким образом, в качестве N можно взять $\left[\sqrt[3]{\frac{4}{\varepsilon}+2}\right]$ (мы учли, что N — число натуральное). Тогда при всех $n>N$ (заметим, что N заведомо больше 1, то есть $n>1$) верно неравенство

$$\left|\frac{2n^3}{n^3-2}-2\right|<\varepsilon.$$

б) Запишем определение предела функции в точке:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\colon \left|x - \frac{1}{3}\right| < \delta\ (x \neq \frac{1}{3})\ \Rightarrow \left|\frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} - 8\right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим разность

$$\frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} - 8$$

и преобразуем ее (учитывая, что $x \neq 1/3$):

$$\frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} - 8 = \frac{15x^2 - 2x - 1 - 8\left(x - \frac{1}{3}\right)}{x - \frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{15x^2 - 10x + \frac{5}{3}}{x - \frac{1}{3}} = \frac{15\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right)}{x - \frac{1}{3}} = 15\frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(x - \frac{1}{3}\right)} = 15\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Итак, нам надо, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|15\left(x - \frac{1}{3}\right)\right| < \varepsilon,$$

то есть

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| < \frac{\varepsilon}{15}.$$

Это означает, что в качестве δ можно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{15}$, и необходимое нам утверждение будет получено.

Задание 5.[1] Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2 - (n+1)^2}{n^2 + n + 1}.$$

[1] В этом и в следующих двух заданиях мы получаем неопределенности вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ и $\{\infty - \infty\}$, поэтому предварительно преобразуем выражения, стоящие под знаком предела.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1-(n^2+2n+1)}{n^2+n+1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+n+1}.$$

Мы видим, что и в числителе, и в знаменателе стоят многочлены второй степени. Вынесем за скобки n^2 в числителе и в знаменателе:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

(Здесь n^2 — натуральное число, поэтому оно отлично от нуля.) Нам известно, что $\frac{2}{n}$, $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n^2}$ — бесконечно малые величины при $n\to\infty$, так что пределы числителя и знаменателя существуют и конечны, причем предел знаменателя не равен нулю. Воспользуемся теоремой о пределе частного:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+n+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{3}{1}=3.$$

Задание 6. Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}}.$$

Решение. Сначала выясним, какие из слагаемых в числителе и в знаменателе имеют наибольшую степень. В числителе $n\sqrt[6]{n}=n^{7/6}$, а

$$\sqrt[5]{32n^{10}+1}=\sqrt[5]{n^{10}\left(32+\frac{1}{n^{10}}\right)}=n^2\cdot\sqrt[5]{32+\frac{1}{n^{10}}}.$$

Мы видим, что степень у n^2 больше, чем у $n^{7/6}$, то есть в числителе старшей степенью будет 2.

Знаменатель состоит из двух сомножителей. В первом наибольшее слагаемое — это n, а во втором

$$\sqrt[3]{n^3-1} = \sqrt[3]{n^3\Big(1-\frac{1}{n^3}\Big)} = n\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}.$$

Теперь преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, для чего в числителе вынесем за скобку n^2, а в знаменателе — старшую степень n в каждом из сомножителей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\Big(n^{-5/6}+\sqrt[5]{32+\frac{1}{n^{10}}}\Big)}{n\cdot(1+n^{-3/4})\cdot n\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-5/6}+\sqrt[5]{32+\frac{1}{n^{10}}}}{(1+n^{-3/4})\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}}.$$

Мы знаем, что $n^{-5/6}$, $\frac{1}{n^{10}}$, $n^{-3/4}$ и $\frac{1}{n^3}$ — бесконечно малые величины при $n\to\infty$, поэтому, как и в предыдущем задании, мы можем воспользоваться теоремой о пределе частного:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-5/6}+\sqrt[5]{32+\frac{1}{n^{10}}}}{(1+n^{-3/4})\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\Big(n^{-5/6}+\sqrt[5]{32+\frac{1}{n^{10}}}\Big)}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+n^{-3/4})\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{1\cdot\sqrt[3]{1}} = 2.$$

Задание 7. Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}-\sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}.$$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$\frac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}-\sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}=$$

$$=\frac{(n^2+5)(n^4+2)-(n^6-3n^3+5)}{n(\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}+\sqrt{n^6-3n^3+5})}=$$

$$=\frac{5n^4+3n^3+2n^2+5}{n(\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}+\sqrt{n^6-3n^3+5})}=$$

$$=\frac{n^4\left(5+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^4}\right)}{n\left(\sqrt{n^2\left(1+\frac{5}{n^2}\right)n^4\left(1+\frac{2}{n^4}\right)}+\sqrt{n^6\left(1-\frac{3}{n^3}+\frac{5}{n^6}\right)}\right)}=$$

$$=\frac{n^4\left(5+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^4}\right)}{n\left(n^3\sqrt{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^4}\right)}+n^3\sqrt{1-\frac{3}{n^3}+\frac{5}{n^6}}\right)}=$$

$$=\frac{5+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^4}}{\sqrt{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^4}\right)}+\sqrt{1-\frac{3}{n^3}+\frac{5}{n^6}}}.$$

Рассуждая так же, как в предыдущих случаях, видим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^4}}{\sqrt{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^4}\right)}+\sqrt{1-\frac{3}{n^3}+\frac{5}{n^6}}}=\frac{5}{\sqrt{1\cdot 1}+\sqrt{1}}=\frac{5}{2}=2,5.$$

Задание 8. Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}.$$

Решение. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}=1,$$

в искомом пределе получается неопределенность вида $\{1^\infty\}$, а это означает, что нам придется воспользоваться вторым замечательным пределом. Заметим, что

$$\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}-1=\frac{2n-4}{4n^2+2n+3},$$

то есть

$$\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}=1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3},$$

причем $\dfrac{2n-4}{4n^2+2n+3}$ величина бесконечно малая при $n\to\infty$, поэтому

$$\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}=\left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}=$$

$$=\left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{\frac{4n^2+2n+3}{2n-4}\cdot\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\cdot(1-2n)}=$$

$$=\left[\left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{\frac{4n^2+2n+3}{2n-4}}\right]^{\frac{(2n-4)(1-2n)}{4n^2+2n+3}}.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, имеет вид $(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}$, где α_n — бесконечно малая величина при $n\to\infty$, поэтому предел этого выражения при $n\to\infty$ равен числу e. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-4)(1-2n)}{4n^2+2n+3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n^2+10n-4}{4n^2+2n+3}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Задание 9. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}.$$

Решение. Подставляя $x = 3$ в выражение, стоящее под знаком предела, получаем неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Это означает, что $x = 3$ является корнем как числителя, так и знаменателя, то есть многочлены $x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ и $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ делятся на $x - 3$ без остатка. Выполняя деление, получаем, что

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \frac{(x-3)(x^2 - x - 6)}{(x-3)(x^2 - 2x - 3)} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}.$$

(Мы учли, что $x \neq 3$.) Если подставить $x = 3$ в полученное выражение, мы вновь приходим к неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, т. е. многочлены $x^2 - x - 6$ и $x^2 - 2x - 3$ тоже делятся на $x - 3$ без остатка:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3+2}{3+1} = \frac{5}{4}.$$

Задание 10. Вычислить предел функции

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2 - 9}}.$$

Решение. Подставляя $x = 3$ в выражение, стоящее под знаком предела, получаем неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, а это означает, что наше выражение необходимо предварительно преобразовать.

$$\frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2 - 9}} = \frac{x + 13 - 4(x+1)}{\sqrt[3]{(x-3)(x+3)}\left(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \frac{-3(x-3)}{\sqrt[3]{(x-3)(x+3)}\left(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}\right)} = \frac{-3(x-3)^{2/3}}{\sqrt[3]{x+3}\left(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}\right)}.$$

(Мы учли, что $x \neq 3$.) Теперь

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2 - 9}} = \lim_{x \to 3} \frac{-3(x-3)^{2/3}}{\sqrt[3]{x+3}\left(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \frac{-3 \cdot 0}{\sqrt[3]{6}(\sqrt{16}+2]\sqrt{4})} = 0.$$

Задание 11. Переходя к эквивалентным бесконечно малым величинам, вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(e^{\pi x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)}.$$

Решение. Мы знаем, что $e^{\alpha}-1 \sim \alpha$, если α — бесконечно малая величина, поэтому $e^{\pi x}-1 \sim \pi x$, где πx бесконечно мало при $x \to 0$. Точно так же $\sqrt[3]{1+x} \sim 1+\frac{1}{3}\cdot x$ при $x \to 0$, потому что x — бесконечно малая величина при $x \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(e^{\pi x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot \pi x}{3\Big(1+\frac{1}{3}\cdot x-1\Big)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\pi x}{x} = 2\pi.$$

Задание 12. Исследовать на непрерывность, найти точки разрыва и указать их род. Нарисовать эскиз графика функции.

1) $f(x) = \dfrac{x}{[x]}$

2) $f(x) = \left[\dfrac{2-x}{x+2}\right]$

3) $f(x) = 3^{\frac{x}{x-2}}$

4) $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{tg} x)$.

Решение. 1) Исследуя функцию, содержащую $[x]$, бывает полезно выяснить, как она выглядит при $x \in [k;\, k+1)$, где k — целое число.

Если $x \in [0;\, 1)$, то $[x]=0$ и $f(x)$ не определена.

Если $x \in [1;\, 2)$, то $[x] = 1$ и $f(x) = x$. При $x \in [2;\, 3)$ $[x]=2$ и $f(x) = \frac{x}{2}$. Вообще, при $x \in [n;\, n+1)$ $[x]=n$ и $f(x)=\frac{x}{n}$, причем $f(n) = \frac{n}{n} = 1$ для всех целых $n \neq 0$. График функции $f(x)$ показан на рисунке 1.

Мы видим, что $f(x)$ непрерывна при всех нецелых x, $x \notin [0;\, 1)$. Если x — целое число, $x \neq 0$, $x \neq 1$, то это точка разрыва первого рода, т. к. в ней существуют конечные пределы справа и слева. Точки $x=0$ и $x=1$ лежат на границе области определения функции $f(x)$. В точке $x=0$ функция $f(x)$ не определена, но существует предел слева, равный нулю. В точке $x=1$ существует предел справа, равный 1 и совпадающий со значением функции в этой точке.

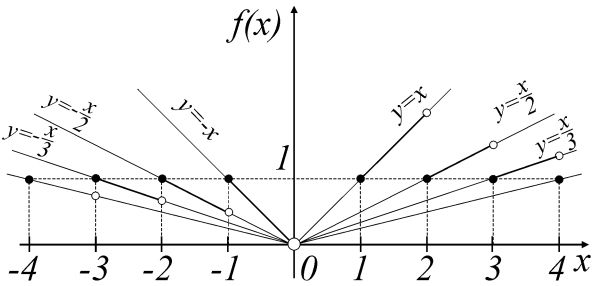

Рис. 1

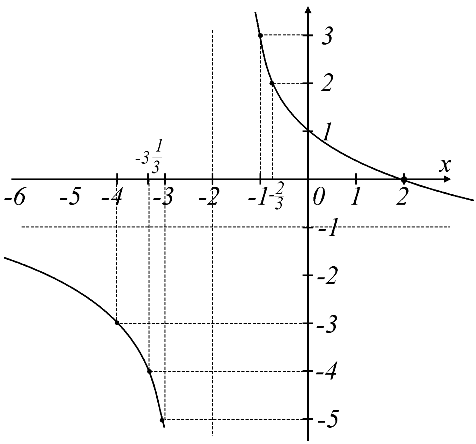

Рис. 2

2) Сначала изобразим график функции $y = \dfrac{2-x}{x+2}$. Это дробно-линейная функция, которую можно представить в виде $y = -1 + \dfrac{4}{x+2}$. Ее график показан на рисунке 2. Теперь посмотрим, что получается, если найти целую часть этого выражения.

Если $x \in (-\infty;\, -6]$, то $y(x) \in (-1;\, -2]$, т. е. $f(x) = -2$.
Если $x \in (-6;\, -4]$, то $y(x) \in (-2;\, -3]$ и $f(x) = -3$.

Аналогично

$$\text{при} \quad x \in \left(-4;\ -3\frac{1}{3}\right] \qquad f(x) = -4,$$

$$\text{при} \quad x \in \left(-3\frac{1}{3};\ -3\right] \qquad f(x) = -5,$$

а далее $f(x)$ будет убывать вплоть до $-\infty$. Точно так же можно рассуждать и при $x > -2$. Теперь, мы можем изобразить график $f(x)$ (см. рисунок 3).

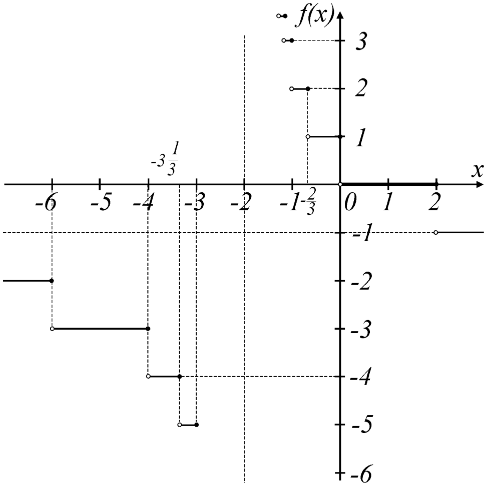

Рис. 3

Мы видим, что $f(x)$ терпит разрыв в тех точках, для которых $\dfrac{2-x}{x+5} = n$, где n — целое число. Это точки вида $x_n = \dfrac{2-5n}{n+1}$ $(n \neq -1)$. Все x_n — точки разрыва первого рода, т. к. $f(x)$, очевидно, имеет в этих точках конечные пределы справа и слева. Кроме того, $x = -2$ представляет собой точку разрыва второго рода, т к. при $x \to -2$ функция $f(x)$ бесконечно велика.

3) Сначала изобразим график функции $y = \dfrac{x}{x-2}$. Как и в предыдущем примере, представим y в виде

$$y = 1 + \frac{2}{x-2}.$$

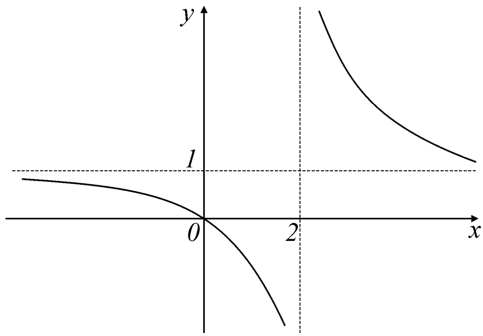

Рис. 4

График этой функции показан на рисунке 4. Теперь мы можем нарисовать эскиз графика функции $f(x) = 3^{\frac{x}{x-2}}$. Мы знаем, что $y = 3^x$ возрастает. При $x \in (-\infty; 2)$ отношение $\dfrac{x}{x-2}$ изменяется от 1 до $-\infty$. Соответственно, $f(x)$ убывает от 3 до 0, потому что меньшему значению $\dfrac{x}{x-2}$ соответствует меньшее значение $f(x)$. Аналогично при $x \in (2; +\infty)$ отношение $\dfrac{x}{x-2}$ изменяется от $+\infty$ до 1, а $f(x)$ убывает от $+\infty$ до 3. Отметим еще, что $f(x) = 3^{\frac{x}{x-2}}$ — элементарная функция, так что она непрерывна на всей области определения и единственной точкой разрыва будет $x = 2$. Очевидно,это точка разрыва второго рода, потому что предел $f(x)$ при $x \to 2 + 0$ бесконечен.

Эскиз графика функции $f(x)$ изображен на рисунке 5.

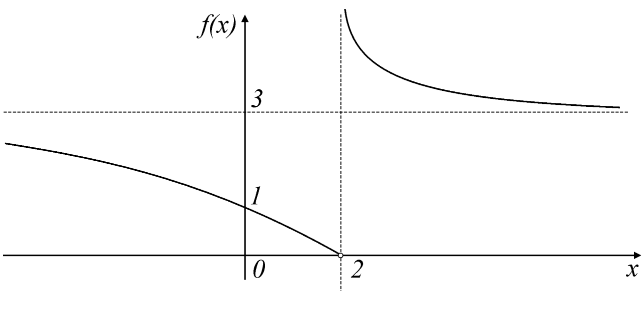

Рис. 5

4) Как известно,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Решением неравенства $\operatorname{tg} x > 0$ будет объединение интервалов вида $x \in \left(\pi n, \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Соответственно, при $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \pi + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ функция $\operatorname{tg} x < 0$. При $x = \pi n$ функция $\operatorname{tg} x = 0$, а при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ она не существует. Таким образом,

$$\operatorname{sgn} \operatorname{tg} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \left(\pi n, \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{если } x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ -1, & \text{если } x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \pi + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 6. Функция $f(x)$ терпит разрыв при $x = \dfrac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$, причем все эти точки — точки разрыва первого рода, т. к. у $f(x)$ есть конечные пределы слева и справа.

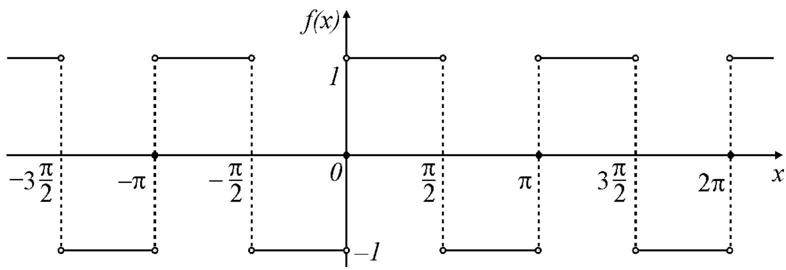

Рис. 6

Работа № 2. Дифференцирование.

Задание 1. Составить уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y = 6\sqrt[3]{x} - \frac{16\sqrt[4]{x}}{3}, \qquad x_0 = 1.$$

Решение. Как известно, уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

где $y_0 = y(x_0)$. Найдем y_0.

$$y(x_0) = 6\sqrt[3]{1} - \frac{16\sqrt[4]{1}}{3} = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}.$$

Чтобы найти $y'(x_0)$, выясним, какой вид имеет $y'(x)$.

$$y'(x) = \left(6\sqrt[3]{x} - \frac{16\sqrt[4]{x}}{3}\right)' = \left(6x^{1/3} - \frac{16}{3}x^{1/4}\right)' =$$
$$= 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{-3/4} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{3\sqrt[4]{x^3}}.$$

Теперь

$$y'(x_0) = \frac{2}{\sqrt[3]{1^2}} - \frac{4}{3\sqrt[4]{1^3}} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Подставляем найденные значения в уравнение касательной:

$$y - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(x - 1).$$

Окончательно получаем:

$$y = \frac{2}{3}x.$$

Задание 2. Найти дифференциал dy:

$$y = x\sqrt{x^2 - 1} + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|.$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$dy = y' \cdot dx.$$

Найдем y':

$$y' = (x\sqrt{x^2-1} + \ln|x + \sqrt{x^2-1}|)' =$$

$$= x' \cdot \sqrt{x^2-1} + x(\sqrt{x^2-1})' + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}(x + \sqrt{x^2-1})' =$$

$$= 1 \cdot \sqrt{x^2-1} + x \cdot \frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}\right) =$$

$$= \sqrt{x^2-1} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) =$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2-1})^2 + x^2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Тогда

$$dy = \frac{2x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Задание 3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, \qquad x = 1,58.$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$\Delta y \approx dy.$$

Здесь

$$\Delta y = y(x) - y(x_0),$$
$$dy = y'(x_0) \cdot dx = y'(x_0) \cdot \Delta x = y'(x_0)(x - x_0),$$

где x_0 — некоторая точка, достаточно близкая к точке x (чем меньше разность $|x - x_0|$, тем точнее наше приближенное равенство). Итак,

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0).$$

В качестве x_0 выгодно взять точку, в которой легко сосчитать значения $y(x_0)$ и $y'(x_0)$. Найдем $y'(x)$.

$$y'(x) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\Big)' = \Big((2x+1)^{-1/2}\Big)' = -\frac{1}{2}(2x+1)^{-3/2}\cdot 2 =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{(2x+1)^3}} = \frac{-1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}.$$

Таким образом, имеет смысл взять в качестве x_0 такую точку, в которой легко найти $\sqrt{2x_0+1}$. Среди точек, близких к $x = 1,58$, этим свойством обладает точка $x_0 = 1,5$. Тогда

$$y(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1,5+1}} = \frac{1}{2},$$
$$y'(x_0) = \frac{-1}{(2\cdot 1,5+1)\sqrt{2\cdot 1,5+1}} = -\frac{1}{8},$$
$$x - x_0 = 1,58 - 1,5 = 0,08.$$

Вычисляем $y(x)$:

$$y(x) \approx \frac{1}{2} + \Big(-\frac{1}{8}\Big)\cdot 0,08 = 0,5 - 0,01 = 0,49.$$

Задание 4. Найти производную:

$$y = \frac{3x^6+4x^4-x^2-2}{15\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение. Воспользуемся формулой производной частного, вынося предварительно вперед константу $\frac{1}{15}$:

$$y' = \frac{1}{15}\cdot\frac{(3x^6+4x^4-x^2-2)'\sqrt{1+x^2} - (3x^6+4x^4-x^2-2)(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} =$$
$$= \frac{1}{15}\cdot\frac{(18x^5+16x^3-2x)\sqrt{1+x^2} - (3x^6+4x^4-x^2-2)\dfrac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} =$$
$$= \frac{1}{15(1+x^2)}\Big((18x^5+16x^3-2x)\sqrt{1+x^2} - (3x^6+4x^4-x^2-2)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big).$$

Приведем выражения, стоящие в скобках, к общему знаменателю:

$$y' = \frac{1}{15(1+x^2)} \cdot \frac{(18x^5+16x^3-2x)(1+x^2)-(3x^6+4x^4-x^2-2)x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Выполнив тождественные преобразования, получаем:

$$y' = \frac{1}{15(1+x^2)} \cdot \frac{15x^7+30x^5+15x^3}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{x^3(x^4+2x^2+1)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^3(x^2+1)^2}{(1+x^2)^{3/2}} = x^3\sqrt{1+x^2}.$$

Задание 5. Найти производную:

$$y = \ln\ln^2\ln^3 x.$$

Решение. Во-первых, заметим, что $y = \ln\ln^2\ln^3 x$ можно переписать в виде

$$y = \ln(\ln(\ln x)^3)^2.$$

Теперь несколько раз воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции:

$$y' = (\ln(\ln(\ln x)^3)^2)' = \frac{1}{(\ln(\ln x)^3)^2}((\ln(\ln x)^3)^2)' =$$

$$= \frac{1}{(\ln\ln^3 x)^2} \cdot 2\ln(\ln x)^3 \cdot (\ln(\ln x)^3)' =$$

$$= \frac{1}{(\ln\ln^3 x)^2} \cdot 2\ln\ln^3 x \cdot \frac{1}{(\ln x)^3}((\ln x)^3)' =$$

$$= \frac{2}{\ln\ln^3 x} \cdot \frac{1}{(\ln x)^3} \cdot 3(\ln x)^2 \cdot (\ln x)' =$$

$$= \frac{2}{\ln\ln^3 x} \cdot \frac{3}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x \cdot \ln x \cdot \ln\ln^3 x}.$$

Задание 6. Найти производную:

$$y = \operatorname{tg}\sqrt{\cos(1/3)} + \frac{\sin^2 31x}{31\cos 62x}.$$

Решение. Во-первых, заметим, что $\operatorname{tg}\sqrt{\cos(1/3)}$ — это константа, и ее производная равна нулю. Производную второго слагаемого можно найти как производную частного, но мы воспользуемся тем, что

$$\sin^2 31x = \frac{1}{2}(1-\cos 62x),$$

то есть

$$\frac{\sin^2 31x}{31\cos 62x} = \frac{1}{62}\left(\frac{1}{\cos 62x}-1\right) = \\ = \frac{1}{62}\cdot\frac{1}{\cos 62x}-\frac{1}{62}.$$

Таким образом,

$$y' = \left(\frac{1}{62}\cdot\frac{1}{\cos 62x}\right)' = \frac{1}{62}\left(-\frac{1}{\cos^2 62x}\right)(\cos 62x)' = \\ = \frac{1}{62}\left(-\frac{1}{\cos^2 62x}\right)(-\sin 62x)62 = \frac{\sin 62x}{\cos^2 62x}.$$

Задание 7. Найти производную:

$$y = x^{e^x}\cdot x^9.$$

Решение. Воспользуемся формулой производной произведения:

$$y' = (x^{e^x}\cdot x^9)' = (x^{e^x})'\cdot x^9 + x^{e^x}\cdot(x^9)'.$$

Обозначим $u = x^{e^x}$ и найдем отдельно, чему равна производная u'. В функции u переменными являются как основание, так и показатель степени, поэтому мы не можем воспользоваться ни формулой $(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, в которой предполагается, что n — константа, ни формулой $(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$, в которой предполагается, что a — константа. Тогда возьмем логарифмы от обеих частей равенства $u = x^{e^x}$. Получаем

$$\ln u = e^x\cdot\ln x.$$

Производные одинаковых выражений должны совпадать, поэтому

$$(\ln u)' = (e^x\cdot\ln x)'.$$

Найдем обе производные, помня, что u — сложная функция.

$$\frac{u'}{u} = (e^x)'\cdot\ln x + e^x(\ln x)',$$

$$\frac{u'}{u} = e^x\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot e^x.$$

Тогда
$$u' = u\Big(e^x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot e^x\Big).$$
Учитывая, что $u = x^{e^x}$, находим
$$u' = x^{e^x} \cdot e^x\Big(\ln x + \frac{1}{x}\Big).$$
Заметим, что тот же результат можно было получить иначе, если учесть, что $a^b = e^{b\ln a}$. Тогда $u = x^{e^x} = e^{e^x \cdot \ln x}$ и
$$u' = \Big(e^{e^x \cdot \ln x}\Big)' = e^{e^x \cdot \ln x} \cdot (e^x \ln x)' =$$
$$= e^{e^x \cdot \ln x} \cdot \Big(e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x}\Big) =$$
$$= x^{e^x} \cdot e^x\Big(\ln x + \frac{1}{x}\Big).$$
Теперь
$$y' = x^{e^x} \cdot e^x\Big(\ln x + \frac{1}{x}\Big)x^9 + x^{e^x} \cdot 9x^8 =$$
$$= x^{e^x}\Big(e^x \cdot x^9\Big(\ln x + \frac{1}{x}\Big) + 9x^8\Big).$$

Задание 8. Найти производную n-ого порядка:
$$y = 3^{2x+5}.$$

Решение. Найдем несколько первых по счету производных функции y:
$$y' = 3^{2x+5} \cdot \ln 3 \cdot 2$$
$$y'' = (3^{2x+5} \cdot \ln 3 \cdot 2)\ln 3 \cdot 2 = 3^{2x+5}(2\ln 3)^2$$
$$y''' = (3^{2x+5} \cdot \ln 3 \cdot 2)(2\ln 3)^2 = 3^{2x+5}(2\ln 3)^3.$$
Естественно предположить, что
$$y^{(n)} = 3^{2x+5}(2\ln 3)^n.$$
Действительно, в таком случае
$$y^{(n+1)} = (y^{(n)})' = (3^{2x+5}(2\ln 3)^n)' =$$
$$= (2\ln 3)^n(3^{2x+5})' = (2\ln 3)^n \cdot 3^{2x+5} \cdot \ln 3 \cdot 2 =$$
$$= 3^{2x+5}(2\ln 3)^{n+1},$$

т. е. формула остается верной при переходе от n к $n+1$. Окончательно

$$y^{(n)} = (2\ln 3)^n \cdot 3^{2x+5} = \ln^n 9 \cdot 3^{2x+5}.$$

Задание 9. Найти $y'(0)$, если

$$y = \ln(f^2((x+1)g(2x+3))), f(0) = f'(0) = 1, \quad g(3) = 0, \quad g'(3) = 2.$$

Решение. Выразим y' через f' и g':

$$y' = (\ln(f^2((x+1)g(2x+3))))' = \frac{(f^2((x+1)g(2x+3)))'}{f^2((x+1)g(2x+3))} =$$

$$= \frac{2f((x+1)g(2x+3)) \cdot (f((x+1)g(2x+3)))'}{f^2((x+1)g(2x+3))} =$$

$$= \frac{2 \cdot f'((x+1)g(2x+3)) \cdot ((x+1)g(2x+3))'}{f((x+1)g(2x+3))} =$$

$$= \frac{2 \cdot f'((x+1)g(2x+3)) \cdot ((x+1)'g(2x+3) + (x+1)(g(2x+3))')}{f((x+1)g(2x+3))} =$$

$$= \frac{2 \cdot f'((x+1)g(2x+3)) \cdot (g(2x+3) + (x+1)g'(2x+3) \cdot 2)}{f((x+1)g(2x+3))}.$$

Если $x = 0$, то

$$y'(0) = \frac{2f'(g(3)) \cdot (g(3) + 2g'(3))}{f(g(3))} = \frac{2f'(0)(0 + 2 \cdot 2)}{f(0)} = 8.$$

Задание 10. Найти предел, пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\sin(x^2 - 1)}.$$

Решение. Если подставить $x = 1$ в выражение, стоящее под знаком предела, то мы получаем неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Найдем предел отношения производных числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(e^x - e)'}{(\sin(x^2 - 1))'} = \lim_{x\to 1} \frac{e^x}{\cos(x^2 - 1) \cdot 2x} = \frac{e^1}{\cos 0 \cdot 2} = \frac{e}{2}.$$

Как видим, этот предел существует. Следовательно, существует и исходный предел, причем

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\sin(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(e^x-e)'}{(\sin(x^2-1))'}=\frac{e}{2}.$$

Работа № 3. Исследование функции и построение графика.

Задание 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

$$y=\frac{10x+10}{x^2+2x+2},\qquad [-1;\,2].$$

Решение. Заметим, что уравнение x^2+2x+2 не имеет действительных решений, так что функция $y(x)$ непрерывна на всей числовой оси. Отсюда следует, что она достигает наибольшего и наименьшего значений на отрезке $[-1;\,2]$. Эти значения могут достигаться либо в точках экстремума, либо на концах отрезка. Найдем точки, подозрительные на точки экстремума. Для этого найдем y'.

$$y'=\Big(\frac{10x+10}{x^2+2x+2}\Big)'=10\Big(\frac{x+1}{x^2+2x+2}\Big)'=$$

$$=10\cdot\frac{(x+1)'(x^2+2x+2)-(x+1)(x^2+2x+2)'}{(x^2+2x+2)^2}=$$

$$=10\cdot\frac{x^2+2x+2-(x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}=$$

$$=10\cdot\frac{-x^2-2x}{(x^2+2x+2)^2}=-10\cdot\frac{x^2+2x}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Поскольку y' существует при всех действительных x, нам остается найти те точки, в которых y' обращается в ноль:

$$-10\cdot\frac{x^2+2x}{(x^2+2x+2)^2}=0,$$

$$x^2+2x=0,$$

$$x_1=-2,\qquad x_2=0.$$

Точка $x_1 = -2$ не принадлежит отрезку $[-1;\ 2]$. Найдем значение функции в точке $x_2 = 0$. (Нам не обязательно выяснять, будет ли эта точка действительно точкой экстремума. Если нет, то значение $y(0)$ не будет ни наибольшим, ни наименьшим на отрезке $[-1;\ 2]$, и мы увидим это, сравнив $y(0)$ со значениями функции на концах отрезка.)

$$y(0) = \frac{10}{2} = 5.$$

Теперь найдем значения функции на концах отрезка:

$$y(-1) = \frac{-10+10}{1} = 0; \qquad y(2) = \frac{30}{10} = 3.$$

Сравнивая полученные три числа, видим, что наибольшее значение нашей функции на отрезке $[-1;\ 2]$ равно 5 и достигается в точке $x = 0$, а наименьшее равно 0 и достигается при $x = -1$.

Задание 2. Провести полное исследование функции и построить ее график:

$$y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}.$$

Решение. Область определения нашей функции представляет собой всю числовую ось. Легко видеть, что данная функция не является ни четной, ни нечетной. Не будет она и периодичной.

Найдем ее первую и вторую производную.

$$y' = (\sqrt[3]{x(x-1)^2})' = \left(x^{1/3}(x-1)^{2/3}\right)' =$$
$$= \frac{1}{3}x^{-2/3}(x-1)^{2/3} + \frac{2}{3}x^{1/3}(x-1)^{-1/3} =$$
$$= \frac{(x-1)+2x}{3x^{2/3}(x-1)^{1/3}} = \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}.$$

Мы видим, что y' не существует при $x = 0$ и $x = 1$. Кроме того, при $x = \frac{1}{3}$ функция y' обращается в ноль. Таким образом, у нас есть три точки, подозрительные на точки экстремума. Найдем промежутки возрастания и убывания $y(x)$:

Итак, $y(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty;\ 0)$, $\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$ и $(1;\ +\infty)$. На промежутке $\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$ $y(x)$ убывает. Точка $x = 0$ не является точкой экстремума, но $\lim\limits_{x\to 0} y'(x) = \infty$, т.ė. касательная к графику функции

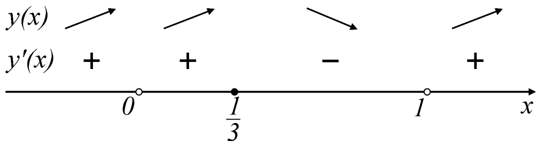

Рис. 7

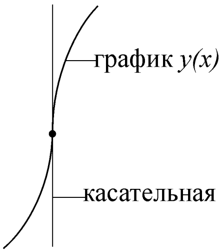

Рис. 8

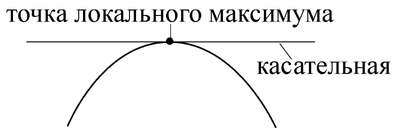

Рис. 9

в этой точке расположена вертикально, а сам график в окрестности этой точки выглядит так, как показано на рисунке 8.

Точка $x = \dfrac{1}{3}$ — это точка локального максимума, причем $y'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$, т. е. касательная к графику $y(x)$ в этой точке расположена горизонтально. График функции в окрестности этой точки показан на рисунке 9.

Наконец, $x = 1$ — точка локального минимума. Здесь $\lim\limits_{x\to 1} y'(x) = \infty$ и касательная вновь вертикальна. График $y(x)$ в окрестности точки $x = 1$ показан на рисунке 10.

Теперь найдем вторую производную функции $y(x)$:

Рис. 10

$$y'' = \left(\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}\right)' =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{4}{3}} + \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{9}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{4}{3}} =$$

$$= x^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{3}x(x-1) - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}(x-1) + \frac{1}{9}x\right) =$$

$$= -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5(x-1)^4}}.$$

Мы видим, что y'' никогда не обращается в ноль, а в точках $x = 0$ и $x = 1$ не существует. Исследуем функцию $y(x)$ на выпуклость.

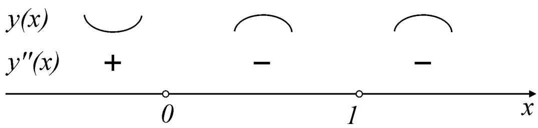

Рис. 11

Итак, при $x \in (-\infty; 0)$ $y(x)$ выпукла вниз, а при $x \in (0; 1)$ и $x \in (1; +\infty)$ выпукла вверх. Точка $x = 0$ является точкой перегиба.

Теперь исследуем поведение $y(x)$ на бесконечности. Мы видим, что $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \infty$, т. е. горизонтальных асимптот нет. Выясним, есть ли наклонные асимптоты. Для этого найдем предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^2}} = 1.$$

Таким образом, предполагаемая наклонная асимптота имеет вид $y = x + b$.

Найдем b:

$$b = \lim_{x\to\infty}(y(x) - x) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x(x-1)^2} - x) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x(x-1)^2 - x^3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4} + \sqrt[3]{x^4(x-1)^2} + x^2} = -\frac{2}{3}.$$

Итак, $y = x - \dfrac{2}{3}$ — наклонная асимптота, причем график $y(x)$ приближается к ней как при $x \to -\infty$, так и при $x \to +\infty$, потому что все необходимые пределы существуют и в том, и в другом случае.

Вертикальных асимптот функция $y(x)$ не имеет, т. к. у нее нет точек разрыва. Найдем значения $y(x)$ в точках экстремума и в точке перегиба:

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}, \quad y(1) = 0.$$

В точках (0; 0) и (1; 0) график функции $y(x)$ пересекает оси координат, и других точек пересечения с осями координат нет. Легко понять, что $y(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$.

Теперь мы можем построить график функции $y(x)$. Он показан на рисунке 12.

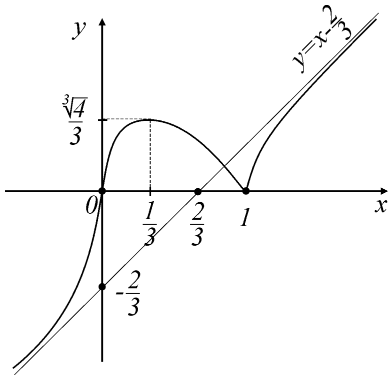

Рис. 12

Задание 3. Провести полное исследование функции и построить ее график:

$$y = \ln(\sqrt{2}\cos x).$$

Решение. Сразу заметим, что $y(x)$ — функция периодическая с периодом 2π, поэтому достаточно будет исследовать ее на промежутке длиной 2π, например, на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Во-первых, наша функция существует только в том случае, когда $\sqrt{2}\cos x > 0$. На отрезке $[-\pi; \pi]$ решением этого неравенства будет интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $y(x)$ определена при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. В силу четности функции $f(x) = \cos x$ наша функция будет четной. Найдем ее первую производную.

$$y' = (\ln(\sqrt{2}\cos x))' = \frac{(\sqrt{2}\cos x)'}{\sqrt{2}\cos x} = \frac{-\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2}\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

На интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right)$ y' всегда определена. Она обращается в ноль при $x = 0$. Исследуем $y(x)$ на возрастание и убывание.

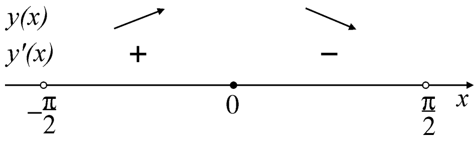

Рис. 13

Мы видим, что при $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\, 0\right)$ функция возрастает, а при $x \in \left(0;\, \frac{\pi}{2}\right)$ убывает. Точка $x = 0$ — точка локального максимума, касательная к графику функции в данной точке горизонтальна. Значение функции в данной точке $y(0) = \ln\sqrt{2}$. Найдем $y''(x)$.

$$y'' = (-\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

На интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right)$ y'' определена и отрицательна, т. е. $y(x)$ выпукла вверх.

Исследуем поведение нашей функции на границе области определения. При $x \to -\frac{\pi}{2} + 0$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} \cos x = +0,$$

поэтому

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} \ln(\sqrt{2}\cos x) = -\infty.$$

Аналогично

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \ln(\sqrt{2}\cos x) = -\infty.$$

Итак, при $x \to \pm\frac{\pi}{2}$ у функции $y(x)$ есть вертикальные асимптоты. Горизонтальных асимптот у нее нет, т. к. она периодична.

Найдем точки пересечения графика $y(x)$ с осями координат. В точке $(0;\ \ln\sqrt{2})$ график $y(x)$ пересекает ось ординат. Ищем точки пересечения с осью абсцисс:

$$\ln(\sqrt{2}\cos x) = 0, \qquad \sqrt{2}\cos x = 1,$$
$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad x = \pm\frac{\pi}{4}.$$

(Мы учли, что $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.) Теперь мы можем построить график данной функции. Он показан на рисунке 14.

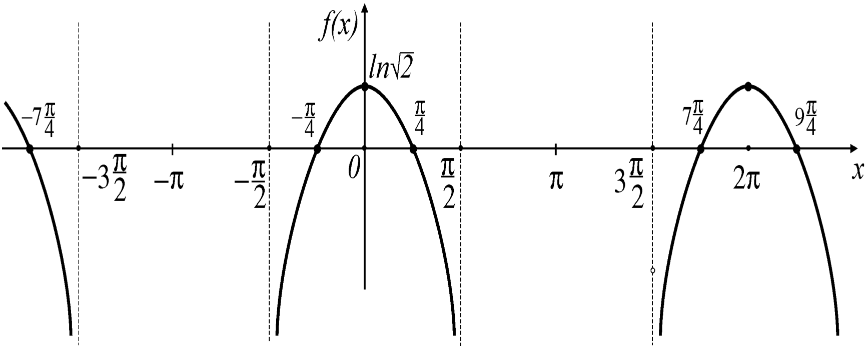

Рис. 14

Задание 4. Провести исследование функции и построить ее график:

$$\begin{cases} x = t + e^{-t} \\ y = 2t + e^{-2t}. \end{cases}$$

Решение. И $x(t)$, и $y(t)$ определены при всех значениях t. Поскольку неравенство $e^t > t$ выполняется при всех действительных t, всегда верны неравенства

$$e^{-t} > -t \quad \text{и} \quad e^{-2t} > -2t,$$

так что $x(t)$ и $y(t)$ всегда положительны, и график нашей функции расположен в первом квадранте. Ни $x(t)$, ни $y(t)$ не будут ни четными, ни нечетными относительно t. Говорить о четности $y(x)$ не имеет смысла, т. к. $x(t)$ всегда больше нуля. Не будут наши функции и периодическими.

Исследуем их на возрастание и убывание.

$$x'_t = (t + e^{-t})' = 1 - e^{-t},$$
$$y'_t = (2t + e^{-2t})' = 2 - 2e^{-2t} = 2(1 - e^{-2t}).$$

Обе производные обращаются в ноль при $t = 0$. Соответственно,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2(1 - e^{-2t})}{1 - e^{-t}} = 2(1 + e^{-t}).$$

Мы видим, что y'_x всегда больше нуля. Лучше понять поведение функции помогает следующая таблица:

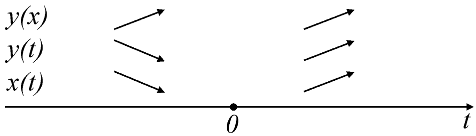

Рис. 15

Итак, при $t \in (-\infty; 0)$ $x(t)$ и $y(t)$ убывают, поэтому $y(x)$ возрастает (меньшему значению x соответствует меньшее значение y). При $t \in (0; +\infty)$ $x(t)$ и $y(t)$ возрастают, поэтому $y(x)$ возрастает. Точка $t = 0$ — точка локального минимума обеих функций. На плоскости xOy ей соответствует точка с координатами $(1; 1)$. Здесь функции $x(t)$ и $y(t)$ меняют направление своего движения. Такая точка называется точкой возврата.

Теперь исследуем $y(x)$ на выпуклость, для этого найдем y''_{xx}.

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (2(1 + e^{-t}))'_x = \frac{(2(1 + e^{-t}))'_t}{x'_t}.$$

(Мы еще раз воспользовались тем, что $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.) Учитывая, что $x'_t = 1 - e^{-t}$, получаем

$$y''_{xx} = \frac{-2e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

Итак, при $t<0$ y''_{xx} больше нуля, и $y(x)$ выпукла вниз, а при $t>0$ y''_{xx} меньше нуля, и $y(x)$ выпукла вверх.

Исследуем поведение функции на бесконечности. При $t\to-\infty$

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty}(t+e^{-t}) = e^{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty}(2t+e^{-2t}) = e^{+\infty} = +\infty.$$

При $t\to+\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty}(t+e^{-t}) = \lim_{t\to+\infty} t = +\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}(2t+e^{-2t}) = \lim_{t\to+\infty} 2t = +\infty.$$

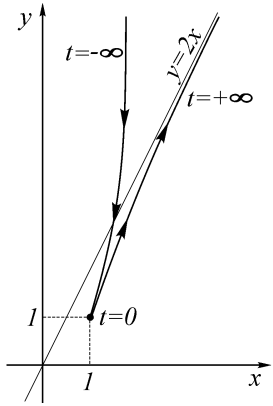

Рис. 16

Заметим, что в первом случае и $x(t)$, и $y(t)$ будут больше, чем во втором, т. к. e^t при $t\to+\infty$ возрастает намного быстрее, чем t.

Выясним, есть ли у графика $y(x)$ асимптоты. Поскольку $x\to\infty$ только при $t\to\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=\infty$ и горизонтальных асимптот нет. По той же причине нет и вертикальных асимптот. Ищем $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}$. Имеются две возможности:

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty}\frac{2t+e^{-2t}}{t+e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{e^{-2t}}{e^{-t}} = +\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2t+e^{-2t}}{t+e^{-t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{t} = 2.$$

Итак, при $t\to-\infty$ наклонных асимптот нет. При $t\to+\infty$

$$\lim_{t\to+\infty}(y(t)-2x(t)) = \lim_{t\to+\infty}(2t+e^{-2t}-2t-2e^{-t}) = 0,$$

т. е. имеется наклонная асимптота $y=2x$.[2] График функции $y(x)$ показан на рисунке 16 (стрелочкой отмечено направление движения при возрастании t).

[2]Предлагается самостоятельно объяснить почему у графика этой функции нет самопересечений, т. е. нет таких t_1 и t_2, что $x(t_1)=x(t_2)$ и $y(t_1)=y(t_2)$.

Варианты индивидуальных заданий

Работа № 1. Предел и непрерывность функции.

Задание 1. Сформулировать в логических символах утверждения:

1. а) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b-0$ б) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^3 \neq -\infty$
2. а) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b-0$ б) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^2 \neq +\infty$
3. а) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b+0$ б) $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| \neq 0$
4. а) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b+0$ б) $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| \neq +\infty$
5. а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b-0$ б) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^3 \neq b+0$
6. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b-0$ б) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^3 \neq b-0$
7. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b-0$ б) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^2 \neq b+0$
8. а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b+0$ б) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^2 \neq b-0$
9. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b+0$ б) $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| \neq b+0$
10. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b+0$ б) $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| \neq b-0$
11. а) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ б) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq b-0$
12. а) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ б) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq b-0$
13. а) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$ б) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq b+0$
14. а) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$ б) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq b+0$
15. а) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$ б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq b-0$
16. а) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq b-0$
17. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq b-0$
18. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq b+0$
19. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq b+0$
20. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq b+0$

21. а) $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = b - 0$ б) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \infty$
22. а) $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = b + 0$ б) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq \infty$
23. а) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^2 = b - 0$ б) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq +\infty$
24. а) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^2 = b + 0$ б) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq +\infty$
25. а) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^3 = b - 0$ б) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq -\infty$
26. а) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^3 = b + 0$ б) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq -\infty$
27. а) $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty$
28. а) $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = 0$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq -\infty$
29. а) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^2 = +\infty$ б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq +\infty$
30. а) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^3 = -\infty$ б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq -\infty$.

Задание 2. Пользуясь определением предела последовательности, доказать следующие утверждения.

1. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность, $c > 0$. Тогда $\{x_n + c\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

2. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность, $c > 0$. Тогда $\{x_n - c\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

3. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность, $c > 0$. Тогда $\{x_n \cdot c\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

4. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность, $c > 0$. Тогда $\left\{\frac{x_n}{c}\right\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

5. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность, $c < 0$. Тогда $\{x_n \cdot c\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность.

6. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность, $c < 0$. Тогда $\left\{\frac{x_n}{c}\right\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность.

7. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность, $c > 0$. Тогда $\{x_n + c\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность.

8. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность, $c > 0$. Тогда $\{x_n - c\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность.

9. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность, $c > 0$. Тогда $\{x_n \cdot c\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность.

10. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность, $c > 0$. Тогда $\left\{\frac{x_n}{c}\right\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность.

11. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность, $c < 0$. Тогда $\{x_n \cdot c\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

12. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность, $c < 0$. Тогда $\left\{\frac{x_n}{c}\right\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

13. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — бесконечно большие положительные последовательности. Тогда $\{x_n + y_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

14. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — бесконечно большие положительные последовательности. Тогда $\{x_n \cdot y_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

15. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — бесконечно большие отрицательные последовательности. Тогда $\{x_n + y_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность.

16. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — бесконечно большие отрицательные последовательности. Тогда $\{x_n \cdot y_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

17. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная, а $\{y_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательности. Тогда $\{x_n - y_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

18. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная, а $\{y_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательности. Тогда $\{x_n \cdot y_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность.

19. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная, а $\{y_n\}$ — бесконечно малая отрицательная последовательности. Тогда $\{x_n + y_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

20. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная, а $\{y_n\}$ — бесконечно малая отрицательная последовательности. Тогда $\{x_n - y_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

21. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная, а $\{y_n\}$ — бесконечно малая отрицательная последовательности. Тогда $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность.

22. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная, а $\{y_n\}$ —

бесконечно малая отрицательная последовательности. Тогда $\left\{\dfrac{y_n}{x_n}\right\}$ — бесконечно малая отрицательная последовательность.

23. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно малая положительная, а $\{y_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательности. Тогда $\{x_n + y_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность.

24. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно малая положительная, а $\{y_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательности. Тогда $\{x_n - y_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

25. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно малая положительная, а $\{y_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательности. Тогда $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ — бесконечно малая отрицательная последовательность.

26. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно малая положительная, а $\{y_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательности. Тогда $\left\{\dfrac{y_n}{x_n}\right\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность.

27. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность. Тогда $\{|x_n|\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

28. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая отрицательная последовательность. Тогда $\{x_n^2\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

29. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность. Тогда $\{\sqrt{x_n}\}$ — бесконечно большая положительная последовательность.

30. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая положительная последовательность. Тогда $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно малая положительная последовательность.

Задание 3. Доказать следующие утверждения:

1. $2x - x^2 = O(x)$, $x \to 0$
2. $x \cdot \sin\sqrt{x} = O(x^{3/2})$, $x \to 0$
3. $x \cdot \sin\frac{1}{x} = O(x)$, $x \to 0$
4. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$, $x \to 0$
5. $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = O(1)$, $x \to 0$
6. $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$, $x \to \infty$
7. $\dfrac{x+1}{x^2+1} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \to +\infty$
8. $x + x^2\sin x = O(x^2)$, $x \to +\infty$
9. $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, $x \to +\infty$
10. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$, $x \to +\infty$
11. $2^x = o(e^x)$, $x \to +\infty$
12. $e^x = o(2^x)$, $x \to -\infty$
13. $\dfrac{1}{n!} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \to +\infty$
14. $(-1)^n \cdot n = o(n^2)$, $n \to +\infty$

15. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$, $n\to+\infty$

16. $\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}=O^*\Big(\frac{1}{n}\Big)$, $n\to+\infty$

17. $\frac{\sin(n!)}{n}=O\Big(\frac{1}{n}\Big)$, $n\to+\infty$

18. $\frac{\cos n}{n^2}=O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$, $n\to+\infty$

19. $x^2-5x+6=O^*(x-2)$, $x\to2$

20. $x^2-7x+12\sim x-4$, $x\to4$

21. $\frac{\sin(\pi-x)}{x}=o(1)$, $x\to\pi$

22. $\sin(x^2-3x+2)=o(1)$, $x\to1$

23. $n\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{n}=O^*(1)$, $n\to+\infty$

24. $e^{x^2-1}=O(1)$, $x\to1$

25. $(1+x)^{2x}\sim4$, $x\to1$

26. $x^2-3x\sim x^2$, $x\to\infty$

27. $x\cdot\sin\sqrt{x}=O(x)$, $x\to\infty$

28. $\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}=o(1)$, $x\to0$

29. $\frac{x-1}{x^2+2}=o(1)$, $x\to1$

30. $2^x\sim e^x$, $x\to0$.

Задание 4.[3] Пользуясь определением предела,
а) доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$):

1. $a_n=\frac{3n-2}{2n-1}$, $a=\frac{3}{2}$,
2. $a_n=\frac{4n-1}{2n+1}$, $a=2$,
3. $a_n=\frac{7n+4}{2n+1}$, $a=\frac{7}{2}$,
4. $a_n=\frac{2n-5}{3n+1}$, $a=\frac{2}{3}$,
5. $a_n=\frac{7n-1}{n+1}$, $a=7$,
6. $a_n=\frac{4n^2+1}{3n^2+2}$, $a=\frac{4}{3}$,
7. $a_n=\frac{9-n^3}{1+2n^3}$, $a=-\frac{1}{2}$,
8. $a_n=\frac{4n-3}{2n+1}$, $a=2$,
9. $a_n=\frac{1-2n^2}{2+4n^2}$, $a=-\frac{1}{2}$,
10. $a_n=-\frac{5n}{n+1}$, $a=-5$,
11. $a_n=\frac{n+1}{1-2n}$, $a=-\frac{1}{2}$,
12. $a_n=\frac{2n+1}{3n-5}$, $a=\frac{2}{3}$,
13. $a_n=\frac{1-2n^2}{n^2+3}$, $a=-2$,
14. $a_n=\frac{3n^2}{2-n^2}$, $a=-3$,
15. $a_n=\frac{n}{3n-1}$, $a=\frac{1}{3}$,
16. $a_n=\frac{3n^3}{n^3-1}$, $a=3$,
17. $a_n=\frac{4+2n}{1-3n}$, $a=-\frac{2}{3}$,
18. $a_n=\frac{5n+15}{6-n}$, $a=-5$,
19. $a_n=\frac{13-n^2}{1+2n^2}$, $a=-\frac{1}{2}$,
20. $a_n=\frac{2n-1}{2-3n}$, $a=-\frac{2}{3}$,
21. $a_n=\frac{3n-1}{5n+1}$, $a=\frac{3}{5}$,
22. $a_n=\frac{4n-3}{2n+1}$, $a=2$,

[3] Задания 4–11 из работы №1, а также задания 1–8, 10 из работы №2 и задания 1–3 из работы №3 взяты из задачника [1].

23. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$,

24. $a_n = \dfrac{5n+1}{10n-3}$, $a = \dfrac{1}{2}$,

25. $a_n = \dfrac{2-2n}{3+4n}$, $a = -\dfrac{1}{2}$,

26. $a_n = \dfrac{23-4n}{2-n}$, $a = 4$,

27. $a_n = \dfrac{1+3n}{6-n}$, $a = -3$,

28. $a_n = \dfrac{2n+3}{n+5}$, $a = 2$,

29. $a_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}$, $a = \dfrac{3}{4}$,

30. $a_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}$, $a = -\dfrac{3}{5}$,

б) доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что:

1. $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$,

2. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{5x^2-4x-1}{x-1} = 6$,

3. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x^2+5x-2}{x+2} = -7$,

4. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{4x^2-14x+6}{x-3} = 10$,

5. $\lim\limits_{x\to-1/2} \dfrac{6x^2+x-1}{x+1/2} = -5$,

6. $\lim\limits_{x\to1/2} \dfrac{6x^2-x-1}{x-1/2} = 5$,

7. $\lim\limits_{x\to-1/3} \dfrac{9x^2-1}{x+1/3} = -6$,

8. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x^2-5x-2}{x-2} = 7$,

9. $\lim\limits_{x\to-1/3} \dfrac{3x^2-2x-1}{x+1/3} = -4$,

10. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{7x^2+8x+1}{x+1} = -6$,

11. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} = 2$,

12. $\lim\limits_{x\to1/2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x-1/2} = 5$,

13. $\lim\limits_{x\to1/3} \dfrac{6x^2-5x+1}{x-1/3} = -1$,

14. $\lim\limits_{x\to-7/5} \dfrac{10x^2+9x-7}{x+7/5} = -19$,

15. $\lim\limits_{x\to-7/2} \dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7} = -\dfrac{1}{2}$,

16. $\lim\limits_{x\to5/2} \dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5} = \dfrac{1}{2}$,

17. $\lim\limits_{x\to1/3} \dfrac{6x^2+x-1}{x-1/3} = 5$,

18. $\lim\limits_{x\to-1/2} \dfrac{6x^2-75x-39}{x+1/2} = -81$,

19. $\lim\limits_{x\to11} \dfrac{2x^2-21x-11}{x-11} = 23$,

20. $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{5x^2-24x-5}{x-5} = 26$,

21. $\lim\limits_{x\to-7} \dfrac{2x^2+15x+7}{x+7} = -13$,

22. $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{2x^2+6x-8}{x+4} = -10$,

23. $\lim\limits_{x\to-1/3} \dfrac{6x^2-x-1}{3x+1} = -\dfrac{5}{3}$,

24. $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{x^2+2x-15}{x+5} = -8$,

25. $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{3x^2-40x+128}{x-8} = 8$,

26. $\lim\limits_{x\to10} \dfrac{5x^2-51x+10}{x-10} = 49$,

27. $\lim\limits_{x\to1/2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x-1/2} = -3$,

28. $\lim\limits_{x\to-6} \dfrac{3x^2+17x-6}{x+6} = -19$,

29. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+17x-6}{x-1/3}=19,$

30. $\lim\limits_{x\to -1/5}\dfrac{15x^2-2x-1}{x+1/5}=-8.$

Задание 5. Вычислить пределы числовых последовательностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2},$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4},$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3},$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3},$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2},$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3},$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2},$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3},$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3},$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3},$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3},$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3},$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4},$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3},$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4},$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2},$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3},$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3},$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3},$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2},$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2},$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4},$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^2+(n-5)^2},$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3},$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2},$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2},$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1},$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n},$

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$, 30. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$.

Задание 6. Вычислить пределы числовых последовательностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$,
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$,
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n}-n}$,
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt{9+n^2}}$,
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}$,
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}+\sqrt{n-2}}$,
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$,
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$,
11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{81n^4-n^2+1}}{(n+\sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}$,
12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$,
13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}+\sqrt{n-3}}$,
14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$,
15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}$,
16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}$,
17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5}+\sqrt{n}}$,
18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[6]{n^6+6}-\sqrt{n-6}}$,
19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}-5n}$,
20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}$,
21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}$,
22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}$,
23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^7+5}-\sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5}+\sqrt{n-5}}$,
24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$,
25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2}-\sqrt[5]{n^5+2}}$,
26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{71n}-\sqrt[3]{64n^6+9}}{(n-\sqrt[3]{n})\sqrt{11+n^2}}$,
27. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}}$,
28. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^8+6}-\sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}$,

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$, 30. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[5]{n^5+1}}$.

Задание 7. Вычислить пределы числовых последовательностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}]$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (n-\sqrt[3]{n^3-5})n\sqrt{n}$,
4. $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}]$,
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$,
6. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-3n+2}-n)$,
7. $\lim\limits_{n\to\infty} (n+\sqrt[3]{4-n^3})$,
8. $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}]$,
9. $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}]$,
10. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2[\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8}]$,
11. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n)$,
12. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3})$,
13. $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}]$,
14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$,
15. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3})$,
16. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})$,
17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n(n^5+9)}-\sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}$,
18. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n(n+5)}-n)$,
19. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3+8}(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1})$,
20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)}-\sqrt{n(n^4+2)}}{2\sqrt{n}}$,

21. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}]$,

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)}-n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$,

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)}-\sqrt{n^6-1}}{n}$,

24. $\lim\limits_{n\to\infty}[n-\sqrt{n(n-1)}]$,

25. $\lim\limits_{n\to\infty}n^3[\sqrt[3]{n^2(n^6+4)}-\sqrt[3]{(n^8-1)}]$,

26. $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}]$,

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}[\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}]$,

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4})$,

29. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2})$,

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)(n+2)}(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2})$.

Задание 8. Вычислить пределы числовых последовательностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^2}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^2}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^{n}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-7}\right)^{n/6+1}$

Задание 9. Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$

2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$

6. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$

10. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$

11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$

13. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$

14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

15. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$

16. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$

17. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$

18. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$

19. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$

20. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$

21. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$

22. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$

23. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

24. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

25. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$

26. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$

27. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$

29. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

30. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$

Задание 10. Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

2. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

5. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

6. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

7. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$

14. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

15. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$

16. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$

17. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$

18. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$

19. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$

20. $\lim\limits_{x\to 1/3} \dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$

21. $\lim\limits_{x\to 1/4} \dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$

26. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

27. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$

28. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$

29. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$

30. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$

Задание 11. Переходя к эквивалентным бесконечно малым величинам, вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\operatorname{tg}[2\pi(x+1/2)]}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{4x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x+5\pi/2)\operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg} 3x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg} x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x}-1}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{\sin(\pi(x/2+1))}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1-\cos 2x)}$

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\pi(1+x/2))}{\ln(x+1)}$

30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$

Задание 12. Исследовать на непрерывность, найти точки разрыва и указать их род. Нарисовать эскиз графика функции.

1. $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$
2. $f(x) = x - [x]$
3. $f(x) = x \cdot [x]$
4. $f(x) = [x] \cdot \sin \pi x$
5. $f(x) = x^2 - [x^2]$
6. $f(x) = \left[\dfrac{1}{x+3}\right]$
7. $f(x) = x \cdot \left[\dfrac{1}{x}\right]$
8. $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$
9. $f(x) = \left[\dfrac{1}{x^2}\right]$
10. $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$
11. $f(x) = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{x}$
12. $f(x) = \sec^2\dfrac{1}{x}$
13. $f(x) = (-1)^{[x^2]}$
14. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$
15. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$
16. $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x^2)}$
17. $f(x) = \ln\dfrac{x}{x+1}$
18. $f(x) = e^{-\frac{1}{[x]}}$
19. $f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}$
20. $f(x) = e^{[x^2]}$
21. $f(x) = \ln[|x|]$
22. $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{2}{\cos x}\right)$
23. $f(x) = 2^{\frac{1}{|x|}}$
24. $f(x) = (x+1)\operatorname{sgn} x$
25. $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\cdot[x]\right)$
26. $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sgn}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
27. $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot[x]\right)$
28. $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sgn} x$
29. $f(x) = \operatorname{sgn}[x^2]$
30. $f(x) = [2-\cos x]$

Работа № 2. Дифференцирование.

Задание 1. Составить уравнение нормали (в вариантах 1–12) и уравнение касательной (в вариантах 13–30) к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

1. $y = \dfrac{4x - x^2}{4}$,	$x_0 = 2$,	2. $y = 2x^2 + 3x - 1$,	$x_0 = -2$,
3. $y = x - x^3$,	$x_0 = -1$,	4. $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32$,	$x_0 = 4$,
5. $y = x + \sqrt{x^3}$,	$x_0 = 1$,	6. $y = \sqrt[3]{x^2} - 20$,	$x_0 = -8$,
7. $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$,	$x_0 = 4$,	8. $y = 8\sqrt[4]{x} - 70$,	$x_0 = 16$,
9. $y = 2x^2 - 3x + 1$,	$x_0 = 1$,	10. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$,	$x_0 = 3$,
11. $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$,	$x_0 = 64$,	12. $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - 2}$,	$x_0 = 2$,
13. $y = 2x^2 + 3$,	$x_0 = -1$,	14. $y = \dfrac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}$,	$x_0 = 1$,
15. $y = \dfrac{2x + 1}{x}$,	$x_0 = 1$,	16. $y = \dfrac{-2(x^8 + 2)}{3(x^4 + 1)}$,	$x_0 = 1$,
17. $y = \dfrac{x^5 + 1}{x^4 + 1}$,	$x_0 = 1$,	18. $y = \dfrac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}$,	$x_0 = 1$,
19. $y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})$,	$x_0 = 1$,	20. $y = \dfrac{1}{3x + 2}$,	$x_0 = 2$,
21. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$,	$x_0 = -2$,	22. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{3}$,	$x_0 = 3$,
23. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$,	$x_0 = 1$,	24. $y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x})$,	$x_0 = 1$,
25. $y = \dfrac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$,	$x_0 = 1$,	26. $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2$,	$x_0 = 1$,
27. $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$,	$x_0 = 1$,	28. $y = \dfrac{3x - 2x^3}{3}$,	$x_0 = 1$,
29. $y = \dfrac{x^2}{10} + 3$,	$x_0 = 2$,	30. $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{4}$,	$x_0 = 4$.

Задание 2. Найти дифференциал dy:

1. $y = x \arcsin(1/x) + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$, $x > 0$

2. $y = \operatorname{tg}(2 \arccos \sqrt{1 - 2x^2})$, $x > 0$

3. $y = \sqrt{1 + 2x} - \ln(x + \sqrt{1 + 2x})$,

4. $y = x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$,

5. $y = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\right)$, $x > 0$

6. $y = x\ln|x+\sqrt{x^2+3}| - \sqrt{x^2+3}$,

7. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + (\operatorname{sh} x)\ln\operatorname{ch} x$,

8. $y = \arccos\left(\dfrac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\right)$,

9. $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x})$,

10. $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x$,

11. $y = \dfrac{\ln|x|}{1+x^2} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}$,

12. $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin e^{-x}$,

13. $y = x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin(x/2)$,

14. $y = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{\sin x}$,

15. $y = 2x + \ln|\sin x + 2\cos x|$,

16. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{\sqrt{tg^3 x}}{3}$,

17. $y = \ln\left|\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}\right|$,

18. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-2}}$,

19. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x}$,

20. $y = \ln|x^2-1| - \dfrac{1}{x^2-1}$,

21. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)$,

22. $y = \ln|2x + 2\sqrt{x^2+x}+1|$,

23. $y = \ln|\cos\sqrt{x}| + \sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}$,

24. $y = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)$,

25. $y = x(\sin\ln x - \cos\ln x)$,

26. $y = \left(\sqrt{x-1} - \dfrac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x-1}}$,

27. $y = \cos x\ln\operatorname{tg} x - \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$,

28. $y = \sqrt{3+x^2} - x\ln|x+\sqrt{3+x^2}|$,

29. $y = \sqrt{x} - (1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$,

30. $y = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

Задание 3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1.	$y = \sqrt[3]{x}$,	$x = 7,76$,	2.	$y = \sqrt[3]{x^3+7x}$,	$x = 1,012$,
3.	$y = \dfrac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}$,	$x = 0,98$,	4.	$y = \sqrt[3]{x}$,	$x = 27,54$,
5.	$y = \arcsin x$,	$x = 0,08$,	6.	$y = \sqrt[3]{x^2+2x+5}$,	$x = 0,97$,
7.	$y = \sqrt[3]{x}$,	$x = 26,46$,	8.	$y = \sqrt{x^2+x+3}$,	$x = 1,97$,
9.	$y = x^{11}$,	$x = 1,021$,	10.	$y = \sqrt[3]{x}$,	$x = 1,21$,
11.	$y = x^{21}$,	$x = 0,998$,	12.	$y = \sqrt[3]{x^2}$,	$x = 1,03$,
13.	$y = x^6$,	$x = 2,01$,	14.	$y = \sqrt[3]{x}$,	$x = 8,24$,
15.	$y = x^7$,	$x = 1,996$,	16.	$y = \sqrt[3]{x}$,	$x = 7,64$,
17.	$y = \sqrt{4x-1}$,	$x = 2,56$,	18.	$y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$,	$x = 1,016$,

19. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=8,36$,
20. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x=4,16$,
21. $y=x^7$, $x=2,002$,
22. $y=\sqrt{4x-3}$, $x=1,78$,
23. $y=\sqrt{x^3}$, $x=0,98$,
24. $y=x^5$, $x=2,997$,
25. $y=\sqrt[5]{x^2}$, $x=1,03$,
26. $y=x^4$, $x=3,998$,
27. $y=\sqrt{1+x+\sin x}$, $x=0,01$,
28. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$, $x=0,01$,
29. $y=\sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)}$, $x=1,02$,
30. $y=\sqrt{x^2+5}$, $x=1,97$.

Задание 4. Найти производную:

1. $y=\dfrac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$
2. $y=\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$
3. $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$
4. $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$
5. $y=\dfrac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$
6. $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$
7. $y=\dfrac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$
8. $y=\dfrac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$
9. $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$
10. $y=\sqrt[3]{\dfrac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$
11. $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$
12. $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$
13. $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$
14. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$
15. $y=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$
16. $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$
17. $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$
18. $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\frac{1}{x}}$
19. $y=\dfrac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$
20. $y=\dfrac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$
21. $y=\dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$
22. $y=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$
23. $y=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$
24. $y=3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$
25. $y=3\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)^2}}$
26. $y=\dfrac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$

27. $y = \dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$ 28. $y = \dfrac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$

29. $y = \dfrac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$ 30. $y = \dfrac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$

Задание 5. Найти производную:

1. $y = \sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}$,
2. $y = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$,
3. $y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2+\sqrt{x})$,
4. $y = \ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$,
5. $y = \ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$,
6. $y = \ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$,
7. $y = \ln^2(x+\cos x)$,
8. $y = \ln^3(1+\cos x)$,
9. $y = \ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$,
10. $y = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$,
11. $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$,
12. $y = x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right) + a^{\pi^{\sqrt{2}}}$,
13. $y = \ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$,
14. $y = \log_{16}\log_5\operatorname{tg} x$,
15. $y = \log_4\log_2\operatorname{tg} x$,
16. $y = \dfrac{1}{2}x(\cos\ln x + \sin\ln x)$,
17. $y = \ln\cos\dfrac{2x+3}{2x+1}$,
18. $y = \lg\ln\operatorname{ctg} x$,
19. $y = \log_a\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$,
20. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{tg} x + \sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x})$,
21. $y = \ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$,
22. $y = \ln\arccos\sqrt{1-e^{4x}}$,
23. $y = \ln(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2})$,
24. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{2}}$,
25. $y = \ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$,
26. $y = \ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$,
27. $y = \ln\dfrac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}(x/2)}$,
28. $y = \ln\dfrac{\ln x}{\sin(1/x)}$,
29. $y = \ln\ln\sin(1+1/x)$,
30. $y = \ln\ln^3\ln^2 x$.

Задание 6. Найти производную:

1. $y = \sin\sqrt{3} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$,
2. $y = \cos\ln 2 - \dfrac{1}{3}\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$,
3. $y = \operatorname{tg}\lg\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$,
4. $y = \operatorname{ctg}\sqrt[3]{5} - \dfrac{1}{8}\dfrac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$,
5. $y = \dfrac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$,
6. $y = \dfrac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$,

7. $y = \dfrac{\cos\ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7\cos 14x}$,

8. $y = \cos\operatorname{ctg} 2 - \dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$,

9. $y = \operatorname{ctg}\cos 2 + \dfrac{1}{6}\dfrac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$,

10. $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \dfrac{1}{20}\dfrac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$,

11. $y = \dfrac{1}{3}\cos\operatorname{tg}\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10}\dfrac{\sin^2 10x}{\cos 20x}$,

12. $y = \ln\sin\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{24}\dfrac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$,

13. $y = 8\sin\operatorname{ctg} 3 + \dfrac{1}{5}\dfrac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$,

14. $y = \dfrac{\cos\operatorname{ctg} 3 \cdot \cos^2 14x}{28\sin 28x}$,

15. $y = \dfrac{\cos\operatorname{tg}(1/3) \cdot \sin^2 15x}{15\cos 30x}$,

16. $y = \dfrac{\sin\operatorname{tg}(1/7) \cdot \cos^2 16x}{32\sin 32x}$,

17. $y = \dfrac{\operatorname{ctg}\sin(1/3) \cdot \sin^2 17x}{17\cos 34x}$,

18. $y = \dfrac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2} \cdot \cos^2 18x}{36\sin 36x}$,

19. $y = \dfrac{\operatorname{tg}\ln 2 \cdot \sin^2 19x}{19\cos 38x}$,

20. $y = \operatorname{ctg}\cos 5 - \dfrac{1}{40}\dfrac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$,

21. $y = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \dfrac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}$,

22. $y = \cos\ln 13 - \dfrac{1}{44}\dfrac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$,

23. $y = \ln\cos\dfrac{1}{3} + \dfrac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$,

24. $y = \operatorname{ctg}\sin\dfrac{1}{13} - \dfrac{1}{48}\dfrac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$,

25. $y = \sin\ln\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$,

26. $y = \sqrt[3]{\cos\sqrt{2}} - \dfrac{1}{52}\dfrac{\cos^2 26x}{\sin 52x}$,

27. $y = \sqrt[7]{\operatorname{tg}\cos 2} + \dfrac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$,

28. $y = \sin\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \dfrac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$,

29. $y = \cos^2\sin 3 + \dfrac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$,

30. $y = \sin^3\cos 2 - \dfrac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$.

Задание 7. Найти производную:

1. $y = (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{2}\ln\operatorname{arctg} x}$,
2. $y = (\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$,
3. $y = (\sin x)^{5e^x}$,
4. $y = (\arcsin x)^{e^x}$,
5. $y = (\ln x)^{3^x}$,
6. $y = x^{\arcsin x}$,
7. $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}$,
8. $y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}$,
9. $y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}$,
10. $y = (\cos 5x)^{e^x}$,
11. $y = (x\sin x)^{\sin(x\sin x)}$,
12. $y = (x-5)^{\operatorname{ch} x}$,
13. $y = (x^3+4)^{\operatorname{tg} x}$,
14. $y = x^{\sin x^3}$,
15. $y = (x^2-1)^{\operatorname{sh} x}$,
16. $y = (x^4+5)^{\operatorname{ctg} x}$,
17. $y = (\sin x)^{5x/2}$,
18. $y = (x^2+1)^{\cos x}$,
19. $y = 19x^{19}x^{19}$,
20. $y = x^{3x}2^x$,
21. $y = (\sin\sqrt{x})^{e^{1/x}}$,
22. $y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$,
23. $y = x^{e^{\cos x}}$,
24. $y = x^{2x}5^x$,
25. $y = x^{e^{\sin x}}$,
26. $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln\operatorname{tg} x/4}$,
27. $y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$,
28. $y = (x^8+1)^{\operatorname{th} x}$,

29. $y = x^{29x}29^x$,
30. $y = (\cos 2x)^{\ln\cos 2x/4}$.

Задание 8. Найти производную n-ого порядка:

1. $y = xe^{ax}$,
2. $y = \sin 2x + \cos(x+1)$,
3. $y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}$,
4. $y = \dfrac{4x+7}{2x+3}$,
5. $y = \lg(5x+2)$,
6. $y = a^{3x}$,
7. $y = \dfrac{x}{2(3x+2)}$,
8. $y = \lg(x+4)$,
9. $y = \sqrt{x}$,
10. $y = \dfrac{2x+5}{13(3x+1)}$,
11. $y = 2^{3x+5}$,
12. $y = \sin(x+1) + \cos 2x$,
13. $y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$,
14. $y = \dfrac{4+15x}{5x+1}$,
15. $y = \lg(3x+1)$,
16. $y = 7^{5x}$,
17. $y = \dfrac{x}{9(4x+9)}$,
18. $y = \lg(1+x)$,
19. $y = \dfrac{4}{x}$,
20. $y = \dfrac{5x+1}{13(2x+3)}$,
21. $y = a^{2x+3}$,
22. $y = \sin(3x+1) + \cos 5x$,
23. $y = \sqrt{e^{3x+1}}$,
24. $y = \dfrac{11+12x}{6x+5}$,
25. $y = \lg(2x+7)$,
26. $y = 2^{kx}$,
27. $y = \dfrac{x}{x+1}$,
28. $y = \log_3(x+5)$,
29. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$,
30. $y = \dfrac{7x+1}{17(4x+3)}$.

Задание 9. Найти $y'(0)$, если

1. $y = f\left(\dfrac{x^2}{4x+1}\right) + 1,\ f'(0) = 1$
2. $y = f(\sin^2 x + 2\cos x),\ f'(2) = 2$
3. $y = f^2(\sqrt[3]{x^5}),\ f(0) = f'(0) = 1$
4. $y = \ln(f(2x-3)),\ f(-3) = f'(-3) = -2$
5. $y = \sqrt{f(4x-1)+2},\ f(-1) = -1,\ f'(-1) = 1$
6. $y = f^2(\ln(x+1)),\ f(0) = 2,\ f'(0) = 3$
7. $y = e^{f(x^2+x+1)},\ f(1) = 0,\ f'(1) = 1$
8. $y = 2^{f(2x)},\ f(0) = 2,\ f'(0) = \dfrac{1}{\ln 2}$
9. $y = \sin(3f(x)+4),\ f(0) = -\dfrac{4}{3},\ f'(0) = 1$
10. $y = \dfrac{1}{f(\sin x)},\ f(0) = -1,\ f'(0) = 2$

11. $y = f(x^2)g(x)$, $f(0) = f'(0) = 1$, $g(0) = -1$, $g'(0) = 0$
12. $y = \cos(f(x)g(2x))$, $f(0) = f'(0) = -1$, $g(0) = g'(0) = \pi$
13. $y = \dfrac{f(2x+1)}{g(3x-1)}$, $f(1) = f'(1) = 0$, $g(-1) = g'(-1) = 1$
14. $y = \ln(f(x^2) + g(2x))$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $g(0) = g'(0) = 0$
15. $y = e^{f(x)g(2x)}$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $g(0) = g'(0) = -1$
16. $y = \dfrac{1}{f^2(3x+2)}$, $f(2) = f'(2) = 1$
17. $y = 3f^2(x)$, $f(0) = 1$, $f'(0) = \dfrac{1}{\ln 3}$
18. $y = \sqrt[3]{f^2(x^2)}$, $f(0) = -1$, $f'(0) = 1$
19. $y = (f(x+1) + g(x-1))^2$, $f(1) = f'(1) = 1$, $g(-1) = g'(-1) = 2$
20. $y = \sqrt{f(\ln(x+2))}$, $f(\ln 2) = f'(\ln 2) = 1$
21. $y = f(\ln(g(x))$, $f'(0) = 1$, $g(0) = 1$, $g'(0) = -1$
22. $y = e^{\sqrt[3]{g(x)}} + 2$, $g(0) = -1$ $g'(0) = 1$
23. $y = f(x+2) - g^2(x)$, $f'(2) = 0$, $g(0) = g'(0) = 1$
24. $y = f(3x+2)g(x^2+1)$, $f(2) = 3$, $f'(2) = -1$, $g(1) = g'(1) = 1$
25. $y = (3-2x)f(3-2x)$, $f(3) = 2$, $f'(3) = -2$
26. $y = \sqrt{f(x)g(x)}$, $f(0) = g(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $g'(0) = 0$
27. $y = \dfrac{x^2}{f(x^2)}$, $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$
28. $y = \cos(f(x+1)+g(x-1))$, $f(1) = g(-1) = \frac{\pi}{2}$, $f'(1) = g'(-1) = 2$
29. $y = f^3(x) - g(x^3)$, $f(0) = f'(0) = 2$, $g'(0) = 3$
30. $y = f(\sqrt{x + g(x)})$, $f'(1) = 1$, $g(0) = g'(0) = 1$.

Задание 10. Найти предел, пользуясь правилом Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$,

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$,

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$,

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{\ln x-\ln a}$,

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$,

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$,

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$,

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(e^x-e^{-x})}{e^{x^3+1}-e}$,

9. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$,

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$,

11. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln\operatorname{tg} x}$,

12. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$,

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$,

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$,

15. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$, $x>0$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\log_2 x}$,

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$,

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{\ln x}$,

19. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$,

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$,

21. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$,

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$,

23. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin\pi x}$,

24. $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$,

25. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$,

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln(1+x\sqrt{1+xe^x})}$,

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$,

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin bx-\sin ax}{\ln(\operatorname{tg}(\pi/4+ax))}$,

29. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$,

30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

Работа № 3. Исследование функции и построение графика.

Задание 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках:

1. $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$ $\quad x \in [1,\ 4]$
2. $y = 4 - x - \dfrac{4}{x^2}$ $\quad x \in [1,\ 4]$
3. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1$ $\quad x \in [0,\ 6]$
4. $y = \dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$ $\quad x \in [-3,\ 3]$
5. $y = 2\sqrt{x} - x$ $\quad x \in [0,\ 4]$
6. $y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$ $\quad x \in [-1,\ 5]$
7. $y = x - 4\sqrt{x} + 5$ $\quad x \in [1,\ 9]$
8. $y = \dfrac{10x}{1+x^2}$ $\quad x \in [0,\ 3]$
9. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2$ $\quad x \in [-3,\ 3]$
10. $y = 2x^2 + \dfrac{108}{x} - 59$ $\quad x \in [2,\ 4]$
11. $y = 3 - x - \dfrac{4}{(x+2)^2}$ $\quad x \in [-1,\ 2]$
12. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ $\quad x \in [-1,\ 6]$
13. $y = \dfrac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2}$ $\quad x \in [1,\ 4]$
14. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$ $\quad x \in [-1,\ 7]$
15. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$ $\quad x \in [1,\ 5]$
16. $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$ $\quad x \in [-4,\ 2]$
17. $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x} + 8$ $\quad x \in [-4,\ -1]$
18. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ $\quad x \in [-2,\ 4]$
19. $y = \dfrac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$ $\quad x \in [-2,\ 1]$
20. $y = -\dfrac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$ $\quad x \in [-5,\ 1]$
21. $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$ $\quad x \in [0,\ 4]$
22. $y = x^2 - 2x + \dfrac{16}{x-1} - 13$ $\quad x \in [2,\ 5]$
23. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$ $\quad x \in [1,\ 5]$

24. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$ $\quad x \in [-3,\, 4]$
25. $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x + \dfrac{8}{x-2} + 5$ $\quad x \in [-2,\, 1]$
26. $y = 8x + \dfrac{4}{x^2} - 15$ $\quad x \in \left[\dfrac{1}{2},\, 2\right]$
27. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 3$ $\quad x \in [-4,\, 2]$
28. $y = x^2 + 4x + \dfrac{16}{x+2} - 9$ $\quad x \in [-1,\, 2]$
29. $y = \dfrac{4}{x^2} - 8x - 15$ $\quad x \in \left[-2,\, -\dfrac{1}{2}\right]$
30. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}$ $\quad x \in [-2,\, 5]$

Задание 2. Провести полное исследование функций и построить их графики:

1. $y = \sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}$
2. $y = -\sqrt[3]{(x+3)(x^2+6x+6)}$
3. $y = \sqrt[3]{(x+2)(x^2+4x+1)}$
4. $y = \sqrt[3]{(x+1)(x^2+2x-2)}$
5. $y = \sqrt[3]{(x-1)(x^2-2x-2)}$
6. $y = \sqrt[3]{(x-3)(x^2-6x+6)}$
7. $y = \sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$
8. $y = \sqrt[3]{x^2(x+2)^2}$
9. $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)^2}$
10. $y = \sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}$
11. $y = \sqrt[3]{x^2(x+4)^2}$
12. $y = \sqrt[3]{x^2(x-4)^2}$
13. $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$
14. $y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$
15. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2}$
16. $y = \sqrt[3]{(x+6)x^2}$
17. $y = \sqrt[3]{(x-4)(x+2)^2}$
18. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$
19. $y = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$
20. $y = \sqrt[3]{(x-3)x^2}$
21. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$
22. $y = \sqrt[3]{(x+2)(x-4)^2}$
23. $y = \sqrt[3]{(x-6)x^2}$
24. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$
25. $y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$
26. $y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$
27. $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2}$
28. $y = \sqrt[3]{x(x-6)^2}$
29. $y = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$
30. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$

Задание 3. Провести полное исследование функций и построить их графики:

1. $y = e^{\sin x + \cos x}$
2. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$
3. $y = \ln(\cos x + \sin x)$
4. $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$
5. $y = e^{\sqrt{2}\sin x}$
6. $y = \operatorname{arctg} \sin x$
7. $y = \ln(\sqrt{2}\sin x)$
8. $y = \dfrac{1}{\sin x - \cos x}$

9. $y = e^{\sin x - \cos x}$

10. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}$

11. $y = \ln(\sin x - \cos x)$

12. $y = \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

13. $y = e^{-\sqrt{2}\cos x}$

14. $y = -\operatorname{arctg}\cos x$

15. $y = \ln(-\sqrt{2}\cos x)$

16. $y = \dfrac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$

17. $y = e^{-\sin x - \cos x}$

18. $y = \sqrt[3]{\sin x}$

19. $y = \ln(-\sin x - \cos x)$

20. $y = \sqrt{\dfrac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}}$

21. $y = e^{-\sqrt{2}\sin x}$

22. $y = \sqrt[3]{\cos x}$

23. $y = \ln(-\sqrt{2}\sin x)$

24. $y = \sqrt{\cos x}$

25. $y = e^{\cos x - \sin x}$

26. $y = \sqrt[3]{\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}}$

27. $y = \ln(\cos x - \sin x)$

28. $y = \sqrt{\sin x}$

29. $y = e^{\sqrt{2}\cos x}$

30. $y = \sqrt{\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}}$

Задание 4. Провести полное исследование и построить график функции, заданной параметрически.

1. $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = -\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = -\cos t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 3\sin^2 t \\ y = 2\cos^2 t \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = -\sin^2 t \\ y = 2\cos^2 t \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = 2\sin^2 t \\ y = -3\cos^2 t \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = -\sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = -\sin^3 t \\ y = -\cos^3 t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = -\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = -2\cos t \\ y = -3\sin t \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 4\cos^2 t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = -2\cos^2 t \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = -\cos^2 t \\ y = -3\sin^2 t \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = -\cos^3 t \\ y = -\sin^3 t \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = -\sin^3 t \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2\cos t \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 2\cos t \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = -\cos t \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = -3\cos t \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = -2\cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = -2\cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$

Литература

[1] Л. А. Кузнецов. Типовые расчеты. М, ВШ, 1983.

[2] М. С. Красс. Курс высшей математики для экономистов. М.: Наука, 1998.

[3] Л. Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.

[4] А. С. Солодовников. и др. Математика в экономике. М.: Финансы и статистика, 1998.

[5] Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа. Том 1. М.: Наука, 1968.

[6] Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.

[7] В. П. Минорский. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1987.