

**Шуликовская В. В.**

**Методы оптимизации  
и исследование операций**

**(Варианты индивидуальных заданий)**

студентам направления  
«Фундаментальная информатика и  
информационные технологии»

Ижевск  
2020

ББК 22.183.43р30  
УДК 518.5 (075.5)

© В. В. Шуликовская, 2020

Варианты индивидуальных заданий охватывают такие темы как графическое решение задач линейного программирования, прямой и двойственный симплекс-метод, дискретное программирование, аналитические методы нелинейного программирования, динамическое программирование. Адресовано бакалаврам направления 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Может быть использовано при чтении курса «Исследование операций» у бакалавров направления 08.05.00 «Бизнес-информатика».

## Введение

Контрольная работа по методам оптимизации и исследованию операций выполняется студентами дома, в часы, отведенные для самостоятельной работы. Она представляет собой серию индивидуальных заданий, охватывающих всю тематику практических занятий, и по уровню сложности соответствует экзаменационным задачам.

Обязательными при выполнении работы считаются следующие задания:

- задания 1-3 из работы 1;
- задание 1а из работы 2;
- задания 1-4 из работы 5.

Студент, не выполнивший обязательные задания, к экзамену не допускается. Все остальные задания являются факультативными. Их можно выполнять с таким расчетом, чтобы суммарный рейтинг, рассчитанный в соответствии с Приложением 2, составил не менее 41 балла.

Задания можно выполнять письменно, в отдельной тетради. Кроме того, для решения некоторых задач из своей контрольной работы студент может написать программу на любом языке программирования. В этом случае студент демонстрирует преподавателю, как работает написанная им программа, сдает в распечатанном виде ее код и в случае необходимости защищает написанную им программу, отвечая на вопросы преподавателя. За каждую правильно написанную и работающую программу студент получает дополнительные 10 баллов, помимо баллов, указанных в Приложении 2.

Задачи, входящие в данную работу, выполняются студентом в течение всего семестра по мере изучения материала, оформляются и сдаются преподавателю для проверки. Если какое-то из заданий решено неправильно, оно возвращается студенту для доработки.

Полностью выполненная и проверенная работа хранится у студента. Она может быть использована при повторении пройденного материала во время подготовки к экзамену или при изучении других математических дисциплин.

# Варианты индивидуальных заданий

**Работа 1.** Геометрическая интерпретация задач линейного программирования. Каноническая задача линейного программирования.

**Задание 1.** Найти наибольшее значение указанных функций, изобразив на плоскости область, заданную следующими линейными ограничениями (здесь и далее значения параметров  $a, b, c, k, l$  для каждого варианта указаны в Приложении 1):

$$\begin{cases} kx + (b - l)y \leq (b - l)a, \\ (a - k)x + ly \leq (a - k)b, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

- а)  $f_1 = (a + k)x + (b + l)y$ ;  
б)  $f_2 = (a + k)x + ly$ ;  
в)  $f_3 = (a - k)x + ly$ .

Как изменится ответ в последнем случае, если дополнительно потребовать  $y \rightarrow \max$ ?

**Задание 2.** Следующие задачи линейного программирования решить графически.

а)

$$\begin{cases} kx + ly \rightarrow \max, \\ ax + by \geq ab, \\ (l + a)x - ly \geq -la, \\ lx - (l + b)y \leq lb, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} kx + ly \rightarrow \min, \\ ax + by \geq ab, \\ (l + a)x - ly \geq -la, \\ lx - (l + b)y \leq lb, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} kx + by \rightarrow \max, \\ ax + by \geq ab, \\ (l+a)x - ly \leq -la, \\ lx - (l+b)y \geq lb, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

г)

$$\begin{cases} ax + 2by \rightarrow \max, \\ ax + by \leq ab, \\ 2ax + by \leq 2ab, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

**Задание 3.** Изобразив в пространстве область допустимых планов, решить графически следующие задачи линейного программирования.

а)

$$\begin{cases} kx + ly + (k+2l)z \rightarrow \max, \\ bcx + acy + abz \leq abc, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} kx + ly + (k-2l)z \rightarrow \max, \\ acy + abz = abc, \\ bcx + abz = abc, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \end{cases}$$

**Задание 4.** Объяснить, почему задача 3б) является канонической задачей линейного программирования. Указать, в чем состоят ее первая и вторая геометрические интерпретации и какой базис соответствует каждой из вершин области допустимых планов.

**Задание 5.** Записать задачи линейного программирования 1а) и 2б) в канонической форме, уточнить смысл вспомогательных переменных. Указать, какой базис соответствует каждой из вершин многоугольника в первой геометрической интерпретации той же самой задачи.

**Задание 6.** Записать данную задачу линейного программирования в канонической форме. Выяснить, является ли указанный базис допустимым.

**Вариант 1.**

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \geq -2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

**Вариант 2.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 \geq -3, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

**Вариант 3.**

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 \leq 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

**Вариант 4.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq -10, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 5.**

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 \leq 3, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

**Вариант 6.**

$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 \rightarrow \min, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 5 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}.$$

**Вариант 7.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 2 \leq 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 3, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 8.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 5 \geq 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

**Вариант 9.**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 5x_2 \leq 29, \\ 3x_1 - x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 2x_2 = 38, \\ x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 10.**

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 10 \leq 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0, \\ x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 11.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 \geq -3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}.$$

**Вариант 12.**

$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 5 \geq 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^3\}.$$

**Вариант 13.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 5 \geq 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}.$$

**Вариант 14.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 15.**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 4, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}.$$

**Вариант 16.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \leq 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 17.**

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 - 17 \geq 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

**Вариант 18.**

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 7, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

**Вариант 19.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \min, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \leq 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^3\}.$$

**Вариант 20.**

$$\begin{cases} 2(x_1 + x_3 - x_4) \rightarrow \max, \\ -(x_1 + 10x_2 - x_4) - 2 \geq 0, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 9 = 0, \\ x_1 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}.$$

**Вариант 21.**

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 - 11 \leq 0, \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 1 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}.$$

**Вариант 22.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 6 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 23.**

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ -x_1 - 10x_2 + x_4 \geq 2, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 9 = 0, \\ x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

**Вариант 24.**

$$\begin{cases} -(9x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 + 11x_2 - x_4 \leq 3, \\ -5(x_2 + x_3 - 9x_4) + 10 = 0, \\ x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

**Вариант 25.**

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 \rightarrow \min, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 22 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^3\}.$$

**Вариант 26.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - 8 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}.$$

**Вариант 27.**

$$\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 11x_2 - x_4 \geq -3, \\ -5x_2 - 5x_3 + 45x_4 + 10 = 0, \\ x_2 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}.$$

**Вариант 28.**

$$\begin{cases} 12x_1 + x_2 + 7x_3 + 11x_4 \rightarrow \max, \\ 24x_1 + 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 5 \leq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}.$$

**Вариант 29.**

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 11 \leq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 5 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \leq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}.$$

**Вариант 30.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 12 \leq 0, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 \geq 16, \\ x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}.$$

## Работа 2. Симплекс-метод линейного программирования.

### Задание 1.

а) Решить задачу 1а) из работы 1 симплекс-методом. Убедиться, что ответ не зависит от метода решения задачи. По последней симплекс-таблице вновь записать задачу в канонической форме, но уже для нового базиса, и объяснить, почему найденное значение целевой функции действительно максимально.

б) Решить задачу 2а) из работы 1 симплекс-методом, для чего предварительно найти начальный допустимый базис путем подбора и преобразовать задачу к виду, допускающему непосредственную запись симплекс-таблицы.

в) Решить симплекс-методом задачу 2б) из работы 1. Как связаны между собой первоначальные симплекс-таблицы в задачах 2а) и 2б), если первоначальные базисы в них совпадают?

г) Решить симплекс-методом задачу 1в) из работы 1. В чем разница между ответом, полученным с помощью симплекс-метода, и ответом, найденным графически?

д) Решить симплекс-методом задачу 3а) из работы 1.

**Задание 2.** Решить данную задачу линейного программирования симплекс-методом, взяв в качестве начального указанный базис. (Предварительно убедиться, что указанный базис допустим.)

### Вариант 1.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 5, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}. \quad (f^* = 8 \frac{2}{3})$$

### Вариант 2.

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 5, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}. \quad (f^* \rightarrow +\infty)$$

**Вариант 3.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^5\}, \quad (f^* = -3/2)$$

**Вариант 4.**

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^3\}, \quad (f^* = -7, 5)$$

**Вариант 5.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 6, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}, \quad (f^* = -7)$$

**Вариант 6.**

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}, \quad (f^* = -2)$$

**Вариант 7.**

$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 21x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^5\}, \quad (f^* = 5 - 4/23)$$

**Вариант 8.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^3\}, \quad (f^* \rightarrow +\infty)$$

**Вариант 9.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}. \quad (f^* = 11)$$

**Вариант 10.**

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 6, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}. \quad (f^* = 14)$$

**Вариант 11.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}. \quad (f^* = 3)$$

**Вариант 12.**

$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 7, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^5\}. \quad (f^* = 20)$$

**Вариант 13.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^5\}. \quad (f^* \rightarrow +\infty)$$

**Вариант 14.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}, \quad (f^* = 5)$$

**Вариант 15.**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}, \quad (f^* = -1)$$

**Вариант 16.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 5, \\ 11x_1 + x_2 - 12x_3 - 5x_4 + 34x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}, \quad (f^* = 8 - 2/3)$$

**Вариант 17.**

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}, \quad (f^* \rightarrow +\infty)$$

**Вариант 18.**

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 2x_4 - x_5 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 12x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^5\}, \quad (f^* = -3/2)$$

**Вариант 19.**

$$\begin{cases} 6x_1 + 21x_2 - 9x_3 - 3x_4 - 12x_5 \rightarrow \max, \\ -4x_1 - 14x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 5, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^3\}, \quad (f^* = -7, 5)$$

**Вариант 20.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 6, \\ 4x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 19x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^4\}. \quad (f^* = -7)$$

**Вариант 21.**

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 7, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^2\}. \quad (f^* = -2)$$

**Вариант 22.**

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 + 12x_5 \rightarrow \max, \\ -2x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 + 21x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^5\}. \quad (f^* = 5 - 4/23)$$

**Вариант 23.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 = 9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 6x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^2, a^3\}. \quad (f^* \rightarrow +\infty)$$

**Вариант 24.**

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ 4x_1 + 16x_2 - 6x_3 + x_4 + 7x_5 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}. \quad (f^* = 11)$$

**Вариант 25.**

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 6, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^4\}. \quad (f^* = 14)$$

**Вариант 26.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 12x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 - 10x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^3, a^4\}. \quad (f^* = 1)$$

**Вариант 27.**

$$\begin{cases} x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + 7x_5 \rightarrow \max, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 7, \\ -13x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^5\}. \quad (f^* = 20)$$

**Вариант 28.**

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 7, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^5\}. \quad (f^* \rightarrow +\infty)$$

**Вариант 29.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 9, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}. \quad (f^* = 5)$$

**Вариант 30.**

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 7, \\ 5x_1 - 2x_2 + 1x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad \beta = \{a^1, a^3\}, \quad (f^* = -1)$$

**Задание 3.** Решить данные задачи линейного программирования симплекс-методом, предварительно решив вспомогательную задачу по выбору первоначального допустимого базиса.

а)

**Вариант 1.**

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 2x_4 = 14, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 2.**

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 34x_4 = 24, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 16x_4 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 3.**

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 4.**

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 - 2x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 10x_2 - 12x_3 + 3x_4 = 12, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 5.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 6.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 9, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 7.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 8.**

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 14, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 9.**

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 10.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 11.**

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 12.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 13.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 14.**

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 15.**

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 16.**

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + 11x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 17.**

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ 34x_1 + 12x_2 + 11x_3 + x_4 = 24, \\ 16x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 18.**

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 6, \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 19.**

$$\begin{cases} -2x_1 - 8x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - 12x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 12, \\ -6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 20.**

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 21.**

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 9, \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 22.**

$$\begin{cases} -9x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 23.**

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 9, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 14, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 24.**

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 25.**

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 26.**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 27.**

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 28.**

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 29.**

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 3, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 30.**

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

6) Задача 2в) из работы 1.

**Задание 4.** Решить данную задачу линейного программирования двойственным симплекс-методом.

$$\begin{cases} kx + ly \rightarrow \min, \\ ax + by \geq ab, \\ (l+a)x - ly \geq la, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

**Задание 5.** а) Пусть в задаче из задания 1а) добавили новое условие:

$$ax + by \leq ab.$$

Решить возникающую задачу линейного программирования, воспользовавшись двойственным симплекс-методом.

б) Пусть в той же задаче компоненты вектора ограничений изменили свои значения на  $(b - 2l)a$  и  $(a - 2k)b$  соответственно. Выяснить, как это повлияет на вид оптимального плана.

в) Пусть в той же задаче коэффициенты целевой функции изменили свои значения:

$$\hat{f}_1 = (a - k)x + (b - l)y.$$

Выяснить, изменится ли оптимальный план.

г) В каких пределах могут изменяться коэффициенты целевой функции, чтобы оптимальный базис содержал те же самые переменные?

### Работа 3. Теория двойственности.

**Задание 1.** Записать задачи, двойственные к данным задачам линейного программирования. В первом случае записать двойственную задачу двумя способами и сравнить ответы.

a)

$$\begin{cases} kx + ly \rightarrow \min, \\ (a+k)x + (b-l)y \leq kl, \\ lx + ky \leq a+b, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

б)

#### Вариант 1.

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 \geq -2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

#### Вариант 2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 \geq -3, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

#### Вариант 3.

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 \leq 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

#### Вариант 4.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq -10, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 5.**

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5 \geq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 \leq 3. \end{cases}$$

**Вариант 6.**

$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 \rightarrow \min, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 5 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 7.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 2 \leq 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 3, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 8.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 5 \geq 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 9.**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 5x_2 \geq 29, \\ 3x_1 - x_2 \leq 14, \\ 5x_1 + 2x_2 = 38, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 10.**

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 10 \leq 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 11.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 \geq -3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 12.**

$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 5 \geq 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 13.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 5 \geq 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 14.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 5, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 15.**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 4, \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 16.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \leq 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 17.**

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 - 17 \geq 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 18.**

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 7, \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 19.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \min, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \leq 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 20.**

$$\begin{cases} 2(x_1 + x_3 - x_4) \rightarrow \max, \\ -(x_1 + 10x_2 - x_4) - 2 \geq 0, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 9 = 0, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 21.**

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 - 11 \leq 0, \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 1 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 22.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 6 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 23.**

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ -x_1 - 10x_2 + x_4 \geq 2, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 9 = 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 24.**

$$\begin{cases} -(9x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 + 11x_2 - x_4 \leq 3, \\ -5(x_2 + x_3 - 9x_4) + 10 = 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 25.**

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 \rightarrow \min, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 22 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 26.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - 8 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 27.**

$$\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 11x_2 - x_4 \geq -3, \\ -5x_2 - 5x_3 + 45x_4 + 10 = 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 28.**

$$\begin{cases} 12x_1 + x_2 + 7x_3 + 11x_4 \rightarrow \max, \\ 24x_1 + 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 5 \leq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 29.**

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 11 \leq 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 5 = 0, \\ x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 30.**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 12 \leq 0, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 \geq 16, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Задание 2.** Для задач 1, 2а), 2в), 2г), 3а) работы 1 записать двойственные задачи и решить их графически. Сравнить ответы и проверить выполнение теоремы двойственности.

**Задание 3.** Записать задачу, двойственную к задаче 1а) работы 1, после чего решить ее (двойственным) симплекс-методом. Сравнить возникающие при этом симплекс-таблицы с симплекс-таблицами из задания 1а) работы 2.

**Задание 4.** Представить матричные игры с данными платежными матрицами в виде пары задач линейного программирования и решить их, используя теоремы двойственности.

а)

$$A = \begin{pmatrix} a - kb & a & a + kb \\ a + lb & a & a - lb \end{pmatrix};$$

б)

$$B = A^T;$$

в)

$$C = -A^T.$$

## Работа 4. Дискретное программирование.

**Задание 1.** В задаче 1а) из Работы 1 сделать замену переменных  
**Вариант 1.**

$$x = 4x_1 + \frac{1}{2}; \quad y = 3y_1 + \frac{1}{3}.$$

**Вариант 8.**

$$x = 2x_1 + \frac{2}{3}; \quad y = 3y_1.$$

**Варианты 2–7 и 9–30.**

$$x = 2x_1 + \frac{1}{2}; \quad y = 3y_1 + \frac{1}{3}.$$

а) Как изменится область допустимых планов и оптимальное значение целевой функции?

б) Добавить в получившуюся у Вас задачу условие целочисленности и решить возникшую задачу целочисленного линейного программирования методом ветвей и границ.

в) Решить ту же самую задачу методом Гомори (достаточно выполнить две итерации). Сравнить ответы.

**Задание 2.** В задаче 3а) из Работы 1 сделать замену переменных

$$x = x_1 + \frac{1}{2bc}; \quad y = y_1 + \frac{1}{3ac}; \quad z = z_1 + \frac{1}{6ab}.$$

а) Как изменится область допустимых планов и оптимальное значение целевой функции?

б) Добавить в получившуюся у Вас задачу условие целочисленности и решить возникшую задачу целочисленного линейного программирования методом ветвей и границ.

в) Решить ту же самую задачу методом Гомори. Сравнить ответы.

**Задание 3.** Решить задачу о назначениях с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} k & a+k & b+k & c+k & ab+k \\ l & a+l & b+l & c+l & ac+l \\ k+l & a+k+l & b+k+l & c+k+l & bc+k+l \\ a-k & ab-k & ac-k & bc-k & abc-k \\ a-l & ab-l & ac-l & bc-l & abc-l \end{pmatrix}.$$

## Работа 5. Нелинейное программирование.

**Задание 1.** Решить данную задачу безусловной оптимизации.

$$f(x, y) = 2x^2 + by^2 - 2(ab + c)xy - 2(a + c)x - 2(c + b)y \rightarrow \text{extr}.$$

**Задание 2.** Убедиться, что точка  $(a, b, c)$  является подозрительной на экстремум для функции

$$f(x, y, z) = a(x - a)^2 + b(y - b)^2 + c(z - c)^2 + (x - a)(y - b)(z - c).$$

Составив матрицу вторых производных, выяснить, как ведет себя функция  $f(x, y, z)$  в окрестности данной точки.

**Задание 3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x, y)$  из задания 1 в области, заданной неравенствами

$$\begin{cases} ax + ly \leq akl, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

**Задание 4.** Решить задачу условной оптимизации методом Лагранжа. Предварительно объяснить, почему условие типа неравенства в данной задаче следует заменить на условие типа равенства, а условия неотрицательности при поиске **наибольшего** значения целевой функции можно опустить.

**Вариант 1.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 2.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^3 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 110, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 3.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 120, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 4.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 5.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^3 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 180, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 6.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^3 \cdot x_2^2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 7.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^4 \cdot x_2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 140, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 8.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^4 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 9.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^4} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 60, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 10.**

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 11.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^3 \cdot x_4} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 12.**

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2^3 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 80, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 13.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 14.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 15.**

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1^3 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 16.**

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 17.**

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 18.**

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 110, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 19.**

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 120, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 20.**

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 21.**

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 22.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^4 \cdot x_2^2 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 23.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^4 \cdot x_2 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 24.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1 \cdot x_2^4 \cdot x_3^2} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 60, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 25.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^2 \cdot x_2^4 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 26.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^4} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 27.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^4} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 80, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 28.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^3 \cdot x_2^3 \cdot x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 29.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1^3 \cdot x_2 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 90, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Вариант 30.**

$$\begin{cases} \sqrt[7]{x_1 \cdot x_2^3 \cdot x_3^3} \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Задание 5.** Решить данную задачу оптимизации, используя условия Куна-Таккера. Представляя целевую функцию как сумму полных квадратов, объяснить, почему оптимальное значение целевой функции не может достигаться на бесконечности.

$$\begin{cases} \Pi(x, y) = -(a^2 + c^2)x^2 - 2b^2y^2 + 2b(c - a)xy + \\ \quad + 2(ak + cl)x + 2b(k - l)y \rightarrow \max, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

## Работа 6. Динамическое программирование.

**Задание 1.** Решите задачу 4 из работы 5 методом динамического программирования, используя метод

- а)прямой прогонки;
- б)обратной прогонки.

Сравните получившиеся у вас ответы.

**Задание 2.** Решить данную задачу условной оптимизации методом динамического программирования, если значения функций  $f_i(x_i)$  заданы следующей таблицей.

$x_i$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
<b>0</b>	-5	10	3	1
<b>1</b>	-4	9	4	-1
<b>2</b>	-3	8	5	-2
<b>3</b>	-2	7	3	-1
<b>4</b>	-1	6	4	0
<b>5</b>	0	5	5	1
<b>6</b>	1	4	3	2
<b>7</b>	2	3	4	3
<b>8</b>	3	2	5	2
<b>9</b>	4	1	6	1
<b>10</b>	5	0	5	0
<b>&gt; 10</b>	6	-1	4	-2

### Вариант 1.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 + kx_3 + lx_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

### Вариант 2.

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 + kx_3 + lx_4 = 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 3.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 + kx_3 + lx_4 = 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 4.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 + kx_3 + lx_4 = 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 5.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 + kx_3 + lx_4 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 6.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + lx_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 7.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + lx_4 = 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 8.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + lx_4 = 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 9.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + lx_4 = 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 10.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + lx_4 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 11.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 12.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 13.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 14.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 15.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 16.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + lx_2 + x_3 \cdot x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 17.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + lx_2 + x_3 \cdot x_4 = 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 18.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + lx_2 + x_3 \cdot x_4 = 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 19.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + lx_2 + x_3 \cdot x_4 = 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 20.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ kx_1 + lx_2 + x_3 \cdot x_4 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 21.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ (kx_1 + lx_2 + x_3) \cdot x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 22.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ (kx_1 + lx_2 + x_3) \cdot x_4 = 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 23.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ (kx_1 + lx_2 + x_3) \cdot x_4 = 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 24.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ (kx_1 + lx_2 + x_3) \cdot x_4 = 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 25.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ (kx_1 + lx_2 + x_3) \cdot x_4 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 26.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 27.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 28.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 29.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Вариант 30.**

$$\begin{cases} f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) \rightarrow \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Задание 3.** Решите методом динамического программирования задачу о найме работников при следующих условиях:

1) В начале рассматриваемого периода сотрудников на фирме не было.

2) Оптимальное количество сотрудников в течение следующих трех месяцев составляет  $m_1 = a$ ;  $m_2 = b$ ;  $m_3 = c$  человек соответственно. В конце периода количество сотрудников может быть любым.

3) Прием на работу одного сотрудника обходится руководству фирмы в  $b$  денежных единиц, увольнение — в  $b + l$  денежных единиц.

4) Присутствие на работе одного лишнего сотрудника обходится руководству фирмы в  $a + k$  денежных единиц в течение месяца, нехватка одного сотрудника — в  $ab$  денежных единиц в течение месяца.

## Приложение 1. Значения параметров

Вариант	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>k</i>	<i>l</i>
<b>01</b>	2	3	3	1	1
<b>02</b>	2	4	4	1	1
<b>03</b>	2	5	5	1	2
<b>04</b>	2	6	3	1	2
<b>05</b>	2	7	4	1	3
<b>06</b>	3	2	2	1	1
<b>07</b>	3	4	1	1	1
<b>08</b>	3	5	4	1	2
<b>09</b>	3	6	5	1	2
<b>10</b>	3	7	6	1	3
<b>11</b>	4	2	5	1	1
<b>12</b>	4	3	4	2	1
<b>13</b>	4	5	3	2	2
<b>14</b>	4	6	2	2	2
<b>15</b>	4	7	1	2	3
<b>16</b>	5	2	2	2	1
<b>17</b>	5	3	3	2	1
<b>18</b>	5	4	4	2	2
<b>19</b>	5	6	5	2	2
<b>20</b>	5	7	6	2	3
<b>21</b>	6	2	5	1	1
<b>22</b>	6	3	4	2	1
<b>23</b>	6	4	3	1	2
<b>24</b>	6	5	2	2	2
<b>25</b>	6	7	1	1	3
<b>26</b>	7	2	2	2	1
<b>27</b>	7	3	3	1	1
<b>28</b>	7	4	4	2	2
<b>29</b>	7	5	5	1	2
<b>30</b>	7	6	4	2	3

## Приложение 2. Баллы

<b>Номер задания</b>	<b>Баллы</b>	<b>Замечания</b>
Работа 1. Задание 1	1 балл	За каждый пункт (а, б, в)
Работа 1. Задание 2	1 балл	За каждый пункт (а, б, в, г)
Работа 1. Задание 3	1 балл	За каждый пункт (а, б)
Работа 1. Задание 4	2 балла	
Работа 1. Задание 5	3 балла	За каждую задачу
Работа 1. Задание 6	1 балл	
Работа 2. Задание 1	4 балла	За каждую задачу
Работа 2. Задание 2	4 балла	
Работа 2. Задание 3а	6 баллов	
Работа 2. Задание 3б	3 балла	
Работа 2. Задание 4	4 балла	
Работа 2. Задание 5	2 балла	За каждый пункт (а, б, в, г)
Работа 3. Задание 1	2 балла	За каждый пункт (а, б)
Работа 3. Задание 2	3 балла	За каждую задачу
Работа 3. Задание 3	4 балла	
Работа 3. Задание 4	4 балла	За каждый пункт (а, б, в)
Работа 4. Задание 1а	1 балл	
Работа 4. Задание 1б	4 балла	
Работа 4. Задание 1в	4 балла	
Работа 4. Задание 2а	1 балл	
Работа 4. Задание 2б	4 балла	
Работа 4. Задание 2в	4 балла	
Работа 4. Задание 3	4 балла	
Работа 5. Задание 1	1 балл	
Работа 5. Задание 2	2 балла	
Работа 5. Задание 3	2 балла	
Работа 5. Задание 4	2 балла	
Работа 5. Задание 5	2 балла	
Работа 6. Задание 1а	5 баллов	
Работа 6. Задание 1б	5 баллов	
Работа 6. Задание 2	5 баллов	
Работа 6. Задание 3	5 баллов	