Оглавление

Введение

Данное методическое пособие написано на основе курса лекций по математической экономике, прочитанных студентам математического факультета и Высшего колледжа информатики и математики УдГУ. Пособие разбито на разделы, которые соответствуют основным типам моделей математической экономики. Каждый раздел содержит краткие теоретические сведения о свойствах изучаемой модели, примеры решения задач, а также теоретические вопросы и задания для самостоятельного решения.

Пособие адресовано студентам специальности 351400 «Прикладная информатика в области экономики», а также студентам других специальностей, имеющих отношение к математике или к экономике. В частности, оно может быть использовано при изучении таких дисциплин, как «Макроэкономика» и «Микроэкономика». Кроме того, поскольку стандарт специальности 351400 не предусматривает изучения отдельной дисциплины «Финансовая математика», последний раздел пособия посвящен некоторым вопросам, связанным с начислением процентов, что также позволяет студентам лучше понять механизмы обесценивания денег в результате инфляции (например, дисконтирование, встречающееся в ряде математических моделей). Отметим, что читатель должен быть знаком с основами экономической теории, математического анализа и линейной алгебры и иметь хотя бы самое общее представление о теории вероятностей.

Теоретический материал излагается достаточно сжато, по большей части конспективно. В принципе, теоретические сведения даны только в том объеме, который необходим для решения задач. В частности, в пособии не рассматривается уравнение Слуцкого, полностью исключены из рассмотрения модели краткосрочного прогнозирования и регулирования экономики. Сведения о них можно найти в учебниках, упомянутых в списке литературы. Впрочем, данное пособие можно принять за основу при чтении лекций студентам заочной формы обучения, у которых предмет «Математическая экономика» рассчитан на 5 лекционных и 4 практических занятия.

Много внимания уделяется решению задач. С одной стороны, студентам предлагаются стандартные задачи, позволяющие приобрести минимум необходимых навыков в обращении с конкретными, наиболее известными математическими моделями. Образцы этих заданий подробно разбираются в разделе «Примеры решения задач». Одновременно студентам предлагаются и более сложные задачи и вопросы теоретического характера, причем не все они обязательно допускают однозначные ответы. Такие задания требуют умения самостоятельно мыслить и обосновывать свое мнение. В частности, последовательно решая несколько идущих подряд заданий, студент может самостоятельно получить некоторые, не очень сложные, результаты, не вошедшие в теоретический курс. Следует подчеркнуть, что автор считает необходимым развивать у студентов умение «увидеть» математическую модель за словесной формулировкой экономической задачи и, наоборот, понять, к каким экономическим задачам подходит данная математическая модель.

Тема 1.
Предмет математической экономики. Типы математических моделей

Объект изучения математической экономики — экономика и ее подразделения. *Предмет* математической экономики — математические модели реальных экономических объектов. Отметим, что математическая экономика занимается *анализом свойств и решений* математических моделей (существование решения и его единственность, устойчивость относительно изменения начальных данных и т. д.), но *не обосновывает* выбор модели, т. е. степень ее адекватности реальному экономическому объекту. Этим занимается эконометрика. Напомним, что модели, изучаемые математической экономикой, делятся на *макроэкономические* и *микроэкономические* (т. е. имеющие отношение к макро- и микроэкономике соответственно), *равновесные модели* (они носят дескриптивный, т. е. описательный характер) и модели *оптимизации*, в которых требуется принять некоторое решение, как правило, максимизирующее прибыль, либо минимизирующее издержки, время выполнения заказа. Кроме того, модели могут быть *статическими* и описывать объекты, не изменяющиеся во времени, или, наоборот, *динамическими*. Если в модели участвуют какие-либо случайные величины или допускается наличие случайных воздействий на исследуемые показатели, то модель называется *стохастической*, иначе — *детерминированной*.

Вопросы и задания

1. К какому типу экономических моделей относятся

а) паутинообразная модель рынка,

б) модель Леонтьева,

в) модель поведения потребителя (максимизация полезности товаров при ограниченном доходе в зависимости от состава потребительской корзины),

г) модель жизненного цикла товара (изменение цены на товар с течением времени)?

2. Какого рода модели могут появиться при решении

а) задачи об оптимизации производства (максимизация выпуска продукции при фиксированных издержках и ограничениях на объем сырья),

б) задачи о поиске равновесной цены (при заданных функциях спроса и предложения),

в) задачи о разделе рынка между двумя конкурирующими фирмами (если обе они стремятся максимизировать свою прибыль, а цена на товар падает с ростом суммарного выпуска)?

3. Приведите пример экономической модели, сводящейся

а) к задаче оптимизации линейной функции при линейных ограничениях,

б) к поиску неотрицательных решений уравнения вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — функция одной переменной,

в) к решению неоднородной системы линейных уравнений.

4. Какие из данных моделей нельзя рассматривать как статические:

а) модель международной торговли,

б) модель оптимизации капиталовложений,

в) модель макроэкономического равновесия (например, кейнсианскую),

г) модель экономического роста (неоклассическую или кейнсианскую)?

5. Имеет ли смысл рассматривать как случайную величину:

а) объем спроса на продукты питания в небольшом магазине,

б) объем перевозок производителя A, который поставляет товар потребителю B, выполняя его заказ,

в) ежедневный выпуск продукции для данного предприятия,

г) курс доллара по отношению к рублю в фиксированный (будущий) момент времени,

д) стоимость одной минуты рекламного времени на данном телеканале,

е) размеры выплат при погашении кредита при фиксированной процентной ставке?

6. Как Вы думаете, имеет ли смысл вводить случайные величины в модели оптимизации? Почему?

7. В каких моделях, с Вашей точки зрения, более оправдано наличие случайных факторов: в микроэкономических или в макроэкономических? Почему?

Сложные проценты

Предположим, что мы взяли деньги в долг *на* 2 *года*, зная, чему равна процентная ставка *за* 1 *год*. Найдем, сколько денег надо будет вернуть кредитору через 2 года, но на сей раз при подсчетах этой суммы воспользуемся *принципом сложных процентов*, когда проценты, набегающие за второй год, начисляются на всю сумму, накопившуюся к началу этого года. (Говорят, что произошла *капитализация процентов*: проценты, начисленные за первый год, составляют теперь часть капитала.) Таким образом,

$$S_2 = \underbrace{S_0}_{\text{основной капитал}} + \underbrace{S_0 \cdot r}_{\text{проценты за первый год}} + \underbrace{S_1 \cdot r}_{\text{проценты за второй год}},$$

где $S_1 = S_0(1 + r)$ — сумма, накопленная к концу первого года. Мы видим, что

$$S_2 = S_0(1 + r) + S_0(1 + r) \cdot r = S_0(1 + r)^2.$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что

$$S_3 = S_2 + S_2 \cdot r = S_2(1 + r) = S_0(1 + r)^3$$

и вообще,

$$S_n = S_0(1 + r)^n. \tag{8.4}$$

Если же мы хотим найти сумму, накопленную за полгода, то, учитывая, что

$$S_1 = \underbrace{S_{1/2}}_{\text{сумма, накопленная за первые полгода}} + \underbrace{S_{1/2} \cdot r_{1/2}}_{\text{проценты, набежавшие за второе полугодие}} = S_0(1 + r),$$

а

$$S_{1/2} = S_0(1 + r_{1/2}),$$

видим, что

$$S_1 = S_0(1 + r_{1/2})^2 = S_0(1 + r),$$

то есть

$$(1 + r_{1/2}) = (1 + r)^{1/2}$$

и

$$S_{1/2} = S_0(1 + r)^{1/2}.$$

Аналогично $S_{1/n} = S_0(1 + r)^{1/n}$. Рассуждая так же, как в предыдущем разделе, находим, что для любого t

$$S_t = S_0(1 + r)^t. \tag{8.5}$$

Эта формула называется *формулой сложных процентов*. Как правило, ее используют при долгосрочных финансовых операциях, когда t больше одного года.

Пример 5. Банк A взял в банке B кредит в 100 000 рублей сроком на 2 года по ставке 5% годовых. Через год уже банк B взял в банке A кредит в 500 000 рублей на 1 год под 6% годовых. Который из двух банков должен в конце второго года и сколько именно он заплатит?

Решение. Долг банка A перед банком B в конце второго года составляет

$$S_A = 100\,000(1 + 0.05)^2 = 110\,250 \text{ рублей}.$$

Долг банка B перед банком A в конце второго года составляет

$$S_B = 500\,000(1 + 0.06) = 530\,000 \text{ рублей}.$$

Таким образом, банк B должен заплатить банку A

$$530\,000 - 110\,250 = 419\,750 \text{ рублей}.$$

Пример 6. Контракт между фирмой A и банком B предусматривает, что банк предоставляет фирме кредит в течение трех лет ежегодными платежами 1 млн. долларов в начале каждого года при ставке 10% годовых. Чему равен долг фирмы перед банком в конце третьего года?

Решение. Будем считать, что банк предоставил фирме три разных кредита, и найдем проценты, набежавшие на каждый из них. Если за нулевой момент времени принять начало первого года, то кредиты выплачивались в моменты $t = 0$, $t = 1$ и $t = 2$, а долг мы считаем на момент времени $t = 3$ (см. рис. 12).

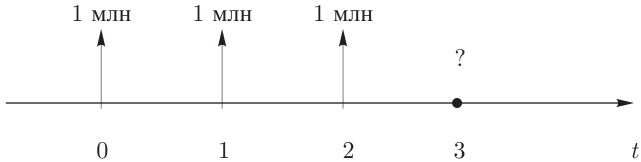

Рис. 12

Если $t = 3$, то первый кредит был взят три года назад, и соответствующий долг равен

$$S^{(1)} = 1\,\text{млн.} \cdot (1 + 0.1)^3 = 1\,331\,000 \text{ долларов.}$$

Второй кредит был взят два года назад, и сейчас он стоит

$$S^{(2)} = 1\,\text{млн.} \cdot (1 + 0.1)^2 = 1\,210\,000 \text{ долларов.}$$

Третий кредит был взят год назад и сейчас

$$S^{(3)} = 1\,\text{млн.} \cdot (1 + 0.1) = 1\,100\,000 \text{ долларов.}$$

Общая сумма долга

$$S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)} = 1\,331\,000 + 1\,210\,000 + 1\,100\,000 = 3\,641\,000 \text{ долларов.}$$

Пример 7. На банковский счет, на котором действует процентная ставка 5% годовых, поместили сумму S_0. Через сколько лет эта сумма удвоится?

Решение. По условию задачи

$$S_t = S_0(1 + 0,05)^t = 2S_0.$$

Сокращая на S_0, получаем показательное уравнение

$$1.05^t = 2,$$

откуда

$$t = \log_{1.05} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1.05} \approx 14.21 \text{ лет.}$$

Итак, вклад удвоится через 14.21 лет. (Заметим, что результат не зависит от суммы S_0.)

Иногда приходится решать и обратную задачу: зная стоимость вклада в конце периода, найти его стоимость в начале периода.

ПРИМЕР 8. Какую сумму надо положить на банковский счет, на котором действует процентная ставка 2% годовых, чтобы через 3 года снять с этого счета 5000 рублей?

Решение. Нам известно, что $S_3 = 5000$ рублей. В то же время

$$S_3 = S_0(1 + 0.02)^3.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$S_0 \cdot 1.02^3 = 5000$$

или

$$S_0 = \frac{5000}{1.02^3} \approx 4711.61 \text{ рублей.}$$

В общем случае, вспоминая формулу сложных процентов (8.5)

$$S_t = S_0(1 + r)^t,$$

видим, что

$$S_0 = S_t(1 + r)^{-t}$$

или

$$S_0 = S_t\Big(\frac{1}{1 + r}\Big)^t = S_t \cdot \nu^t.$$

Число $\nu = \dfrac{1}{1 + r}$ принято называть *коэффициентом дисконтирования*. Коэффициент дисконтирования всегда меньше 1: сумма S_t несколько лет назад (в нулевой момент времени) была эквивалентна меньшей сумме S_0. Коэффициент дисконтирования ν зачастую возникает и в моделях макроэкономики. В этом случае предполагается, что он выражает постепенное обесценивание денег в результате инфляции. В макроэкономических моделях коэффициент ν может изменяться с течением времени (поскольку он уже не связан с фиксированной банковской процентной ставкой), более того, можно считать, что ν — это случайная величина.