Шуликовская В. В.

Лекции по алгебре.

Векторные пространства, линейные операторы и квадратичные формы.

Ижевск
2009

УДК 512.64(075)
ББК 22.143я73

Данное пособие адресовано студентам, изучающим курс линейной алгебры, и содержит разделы, выходящие за рамки обычного курса высшей математики. Пособие было составлено в соответствии со стандартами специальностей «Математические методы в экономике» и «Прикладная информатика в области экономики», но оно может быть полезно и студентам других специальностей.

Шуликовская В. В.
Лекции по алгебре. Векторные пространства, линейные операторы и квадратичные формы. — Ижевск: ООО Информационно-издательский центр «Бон Анца», 2009. — 178 с.

Табл.- 0 Ил.- 31 Библ. - 10

ISBN 978-5-903140-52-7 (ООО ИИЦ «Бон Анца»)

Оглавление

Предисловие

Данная книга написана на основе лекций по линейной алгебре, прочитанных студентам специальностей «Математические методы в экономике» и «Прикладная информатика в области экономики» в Удмуртском госуниверситете. Государственные стандарты этих специальностей предусматривают знакомство с такими разделами линейной алгебры, которые, как правило, недостаточно освещаются или вообще не затрагиваются в обычных учебниках по высшей математике. Вместе с тем учебники по алгебре, адресованные студентам-математикам (и отчасти физикам), зачастую оказываются чересчур сложны, так как они написаны на очень абстрактном уровне и предполагают знакомство с теорией групп. Таким образом, данная книга представляет собой попытку снабдить студентов (особенно студентов-заочников) учебным пособием, которое было бы написано доступным для них языком. Я надеюсь, что она может быть полезна и студентам других специальностей в качестве вспомогательного учебного материала.

Чтобы сделать изложение материала как можно более понятным, все возникающие определения и утверждения иллюстрируются геометрически. Таким образом, читатель может убедиться, что большинство фактов линейной алгебры — это обобщение естественных и практически очевидных свойств векторов на плоскости и в пространстве. С этой же целью многие доказательства сперва проводятся в частном случае для двух- или трехмерных пространств и лишь затем — в общем виде. Некоторые более сложные утверждения не доказываются, а иллюстрируются примерами, которые подобраны с таким расчетом, чтобы сделать утверждение как можно более наглядным, с одной стороны, и продемонстрировать связь линейной алгебры с остальными разделами математики — с другой.

Следует отметить, что в наиболее важных для экономистов разделах математики, использующих линейную алгебру: при решении систем линейных уравнений и задач линейного программирования — векторы традиционно понимаются как векторы-столбцы, а не векторы-строки. Поэтому бóльшая часть утверждений данного учебника формулируется и доказывается для векторов, понимаемых как столбцы, хотя в задачах для самостоятельного решения читателю, как правило, предлагается сформулировать и доказать аналогичные утверждения для строк. Вместе с тем в случаях, когда не требуется умножать вектор на матрицу, мы понимаем вектор как упорядоченный набор из n элементов (координат). Тогда, в целях экономии места, данные элементы записываются в строчку, как это принято в аналитической геометрии. Отметим также, что в данном учебнике мы отказываемся от аксиоматического определения векторного пространства (хотя о возможности такого определения и упоминается в разделе 4): во-первых, оно предполагает хотя бы поверхностное знакомство с теорией групп, во-вторых, в большинстве приложений векторные пространства определены над множествами действительных или комплексных чисел, а там все необходимые аксиомы заведомо выполняются.

Наиболее важные и сложные утверждения в пособии называются теоремами. Менее важные, но самостоятельные утверждения называются предложениями, а вспомогательные, необходимые для доказательства предложений и теорем — леммами. Все утверждения, а также замечания, определения и примеры нумеруются. Конец доказательства отмечается значком ■. Этим же значком заканчивается решение большинства задач. Некоторые замечания, возможно, непонятные студенту-первокурснику, незнакомому с теорией дифференциальных уравнений и с функциями нескольких переменных, набраны более мелким шрифтом и при первом чтении могут быть пропущены.

В каждом разделе приводятся примеры решения наиболее типичных задач. В конце разделов читателю предлагаются теоретические вопросы и задания, помогающие проверить, насколько хорошо он усвоил изложенный материал.

Введение

Линейная алгебра, о которой рассказывает данное учебное пособие, — это раздел математики, *изучающий линейные функции* и *линейные многообразия*, то есть множества, которые можно задать с помощью линейных функций.

Напомним, что линейная функция n переменных имеет вид

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n + b, \qquad (0.1)$$

где a_1, a_2, …, a_n и b — некоторые (числовые) коэффициенты. Соответственно, уравнение

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n + b = 0, \qquad (0.2)$$

задает в пространстве переменных x_1, x_2, …, x_n некоторое множество точек, которое и будет называться линейным многообразием. С помощью одного или нескольких уравнений вида (0.2) можно задавать точки на прямой, точки и прямые на плоскости, точки, прямые и плоскости в пространстве и т. д. Иначе говоря, линейные многообразия — это объекты с наиболее простыми геометрическими свойствами. Точно так же линейная функция — наиболее простая из всех числовых функций, задаваемых аналитически. Если нам известно, что какие-то две величины связаны друг с другом линейным соотношением

$$Y = kX + b,$$

то достаточно будет провести всего два эксперимента, чтобы по двум точкам (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) восстановить k и b. После чего мы легко сможем изобразить зависимость Y от X графически и предсказать, как будет меняться Y при изменении X. Именно это свойство линейной функции имел в виду Лаплас, когда утверждал, что, зная координаты прошлого и настоящего любой системы, он сможет с легкостью предсказать её будущее ([1]).

Если мы рассмотрим *систему линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{0.3}$$

или *задачу линейной оптимизации*

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min) \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{0.4}$$

то можно указать достаточно простые алгоритмы (метод Гаусса в первом случае и симплекс-метод во втором), которые *всегда* позволяют ответить на вопрос, имеют ли данные задачи решение, и найти множество решений, даже если оно бесконечно велико. Для систем нелинейных уравнений, как и для задач нелинейной оптимизации, это удается сделать только в исключительных, наиболее простых случаях. То же самое можно сказать о системах линейных и нелинейных дифференциальных уравнений.

Кроме относительной простоты, у линейных функций есть ещё одно, не менее важное качество: их можно использовать для приближенной записи других, более сложных функций. Действительно, любая дифференцируемая сколь угодно много раз функция (то есть, в частности, любая элементарная функция) удовлетворяет следующей *формуле Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots,$$

причем *при* x, *близких к* x_0, все слагаемые, начиная с третьего, пренебрежимо малы по сравнению с первыми двумя. При фиксированном x_0 значения $f'(x_0) = a$ и $f(x_0) = b$ — две константы, так что справедливо приближенное равенство $f(x) \approx b + a(x - x_0)$, которое выполняется тем точнее, чем меньше модуль разности $|x - x_0|$. Как видим, *локально* (то есть вблизи некоторой точки) произвольная дифференцируемая функция $f(x)$ ведет себя почти так же, как линейная функция $y = b + a(x - x_0)$.

Аналогичными свойствами обладают и функции нескольких переменных. Для них справедливо приближенное равенство

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx b + a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + \ldots + a_n(x_n - x_n^0),$$

где $b = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, $a_i = \dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i}$ — константы, зависящие от выбора исходной точки $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Отсюда, в частности, следует, что, изучая систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

мы можем заменить её на систему линейных уравнений

$$\begin{cases} b_1 + a_{11}(x_1 - x_1^0) + a_{12}(x_2 - x_2^0) + \ldots + a_{1n}(x_n - x_n^0) = 0 \\ b_2 + a_{21}(x_1 - x_1^0) + a_{22}(x_2 - x_2^0) + \ldots + a_{2n}(x_n - x_n^0) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_m + a_{m1}(x_1 - x_1^0) + a_{m2}(x_2 - x_2^0) + \ldots + a_{mn}(x_n - x_n^0) = 0. \end{cases}$$

Конечно, такая замена допустима только *локально*, то есть вблизи точки $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, но, выбирая различные x^0, можно получить достаточно полное представление о поведении исходной нелинейной системы в целом.

Все вышесказанное можно пояснить геометрически. Напомним, что уравнение $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ задает прямую, касательную к графику функции $f(x)$ в точке x_0. Аналогично можно доказать, что

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

— это уравнение плоскости, касательной к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0). Таким образом, изучая поведение кривой на каком-то достаточно малом участке дуги $\smile{MN}$, мы можем рассматривать более простой с геометрической точки зрения отрезок MN', лежащий на касательной, проведенной в точке M (см. рис. 0.1). Если дуга $\smile{MN}$ относительно мала (то есть модуль $|x - x_0|$ мал), то различие будет незначительным. Точно так же, изучая какой-то малый участок поверхности, мы можем заменить его на часть касательной плоскости (см. рис. 0.2).

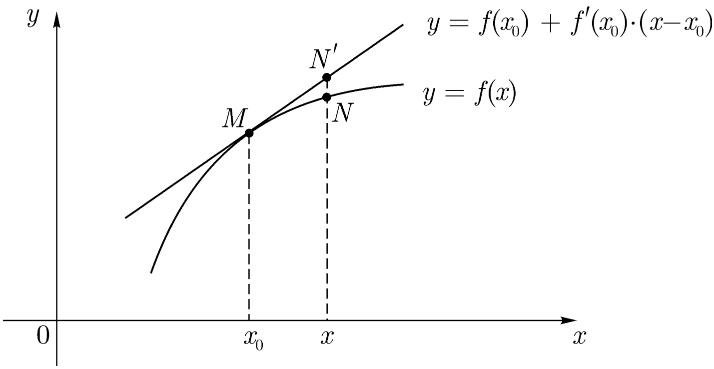

Рис. 0.1

Аналогичные результаты возникают в теории дифференциальных уравнений. В частности, справедлива теорема КАМ (Колмогорова, Арнольда и Мозера), которую нестрого можно сформулировать так ([1]).

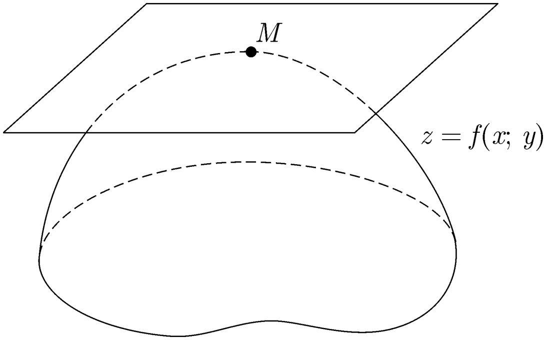

Рис. 0.2

Пусть нам дана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases}$$

у которой есть решение. Пусть возникает небольшое возмущение, то есть к правой части каждого из уравнений добавляется дополнительное, относительно небольшое слагаемое $f_i(y_1, \ldots, y_n)$. *Тогда качественные характеристики системы (существование и единственность решений, поведение на бесконечности, непрерывность) не изменяются.*

Благодаря своим достоинствам линейные функции широко используются в различных математических моделях. Поскольку любая модель предполагает идеализацию и упрощение изучаемой системы, имеет смысл выбирать модель с таким расчетом, чтобы ей соответствовали линейные функции, линейные уравнения и неравенства. Например, в задачах механики часто пренебрегают трением и другими силами сопротивления (если они достаточно малы и не оказывают существенного влияния на происходящие процессы). В моделях биологии и экономики пренебрегают обратной связью. В результате модель получается искаженной, но, как упоминалось выше, это не влияет на её основные качественные характеристики. В то же время линейная модель *предсказуема*: зная начальное состояние системы, мы сразу можем определить, как она поведет себя в дальнейшем.

Однако надо отметить, что в некоторых случаях переход к линейной модели невозможен, так как возникающие искажения будут слишком велики. Принято считать, что линейные модели не имеет смысла использовать в метеорологии, в теории вихрей, при изучении некоторых биологических и социальных процессов, при определении цен на денежных и товарных рынках. Во всех этих ситуациях возникает *детерминированный хаос*, который можно определить как «непериодическое, нестабильное поведение, которое кажется случайным» ([1]). В действительности ничего случайного в этих системах нет, но, чтобы предсказывать их поведение, нам надо знать начальные условия *с бесконечной точностью*, потому что самая незначительная ошибка в начальных данных кардинально изменяет решение. В результате такие системы, которые принято называть *нелинейными*, становятся *непредсказуемыми*. Их изучением (в основном качественным) занимается особая наука: *теория хаоса*.

Вместе с тем линейные модели по-прежнему широко применяются во многих приложениях математики. Переход к *матричной форме записи* позволяет придавать им компактную, удобную для восприятия форму.

В данной книге мы будем изучать *векторные пространства*, которые, как будет показано в дальнейшем, представляют собой множество решений системы вида (0.3), и *линейные операторы*, которые можно рассматривать как обобщение линейной функции (0.1). Предполагается, что наш читатель уже имеет представление о матрицах, умеет выполнять основные действия над ними, вычислять определители и ранги матриц. Кроме того, читатель должен знать, как надо решать системы линейных уравнений общего вида, имеющие бесконечно много решений, и владеть методом математической индукции, поскольку он используется при доказательстве ряда утверждений. Ниже приводятся вопросы и задания, которые позволят читателю оценить уровень своих знаний в указанных разделах математики.

Вопросы и задания

1. Для векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, изображенных на рисунке 0.3, найти графически векторы $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}-\overline{b}$, $2\overline{a}$, $-3\overline{b}$. Чему равны координаты этих векторов, если известно, что $\overline{a}(2;1)$, $\overline{b}(-1;4)$?

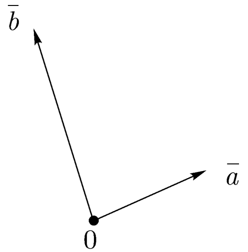

Рис. 0.3

2. Указать, в каком из случаев, изображенных на рисунке 0.4, можно найти константы α и β такие, чтобы

$$\overline{x} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b}.$$

(Возможны несколько вариантов ответа). Можете ли Вы указать знак чисел α и β, если они существуют?

3. Известно, что скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$. Что можно сказать о векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$?

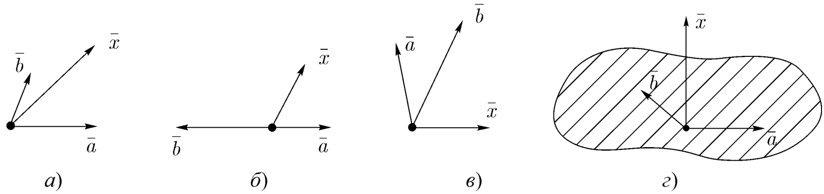

Рис. 0.4

4. Как известно,

$$\cos\angle\overline{a},\overline{b} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}.$$

Используя эту формулу, покажите, что при $k > 0$, $l > 0$

$$\cos\angle k\overline{a}, l\overline{b} = \cos\angle\overline{a},\overline{b}.$$

Изменится ли данное равенство, если $k < 0$, $l > 0$? Если $k < 0$, $l < 0$?

5. Пусть известно, что матрицы $A + B$, $A \cdot B$ и $B \cdot A$ определены. Что можно сказать про размерность матриц A и B?

6. Используя определение обратной матрицы, покажите, что

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

7. Известно, что $A \cdot X \cdot B = C$. Выразите X через A^{-1}, B^{-1} и C.

8. Не используя правило треугольников, найдите значения выражений

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$,

б) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{vmatrix}$,

в) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$.

9. Докажите правило треугольников, разложив определитель третьего порядка по одной из строк. Формулу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

считайте известной.

10. Чему равна сумма

$$b_1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - b_2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + b_3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} ?$$

Выберите правильный ответ (возможно несколько вариантов).

$$\text{а)} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{в)} \begin{vmatrix} b_1 & 4 & 3 \\ b_2 & 3 & -1 \\ b_3 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & b_1 \\ 3 & -1 & b_2 \\ 2 & 0 & b_3 \end{vmatrix}.$$

11. Проверьте справедливость равенства $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = (b_1, b_2)^T$, а вектор $X = \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta}, \frac{\Delta x_2}{\Delta}\right)^T$ найден по правилу Крамера.

12. Записать данное матричное уравнение как систему линейных уравнений. Решить его методом Крамера и методом обратной матрицы. Сравнить ответы.

$$\left(X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

13. Найти ранг матрицы A, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Пусть матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 + 1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что $rgA = 1$. Что можно сказать про числа a_1, a_2 и a_3?

15. Какой вид имеет матрица A размерности 2×3, если известно, что $rgA = 1$?

16. Даны две системы линейных уравнений:

$$A \cdot X = B \text{ и } A \cdot X = C.$$

Может ли оказаться, что

а) одна из них совместна, а вторая — нет;

б) одна из них имеет единственное решение, а вторая несовместна?

17. Пусть $A \cdot X = B$ — неоднородная система линейных уравнений, а X_0 и Y_0 — ее частные решения. Будут ли решениями этой системы векторы

а) $k \cdot X_0$, б) $X_0 + Y_0$, в) $X_0 - Y_0$, г) $X_0 + (1, 1, \ldots, 1)^T$?

18. Пусть матрица однородной системы линейных уравнений имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Какие переменные можно рассматривать в качестве свободных?

19. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений $A \cdot X = B$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Какой вид имеет общее решение однородной системы $A \cdot X = 0$?

Можно ли переписать его в виде

$$\widetilde{c}_1 \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \widetilde{c}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}?$$

20. Общее решение однородной системы линейных уравнений имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x_3 + x_5 \\ 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Можно ли переписать его в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 - x_5 \\ 0,5x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}?$$

21. Применяя метод математической индукции, доказать тождества

а) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

где $n \in \mathbb{N}$.