Шуликовская В. В.

Элементы теории меры. Интеграл Лебега

студентам направления
«Бизнес-информатика»

Ижевск
2015

ББК 22.162 р30
УДК 519.53 (075.5)+517.5 (075.5)

Данное пособие замечательно прежде всего тем, что мои коллеги из Удмуртского госуниверситета отказались писать рецензию на него, настолько необычным показалось им мое понимание меры, измеримой функции и интеграла Лебега, описанное в последних двух разделах. Разумеется, с момента его опубликования прошло уже очень много лет, но все-таки я была бы рада узнать мнение читателей, конечно, если у кого-то хватит терпения проследить за моими рассуждениями до конца.

Пособие адресовано студентам первого курса направления «Бизнес-информатика», изучающим математический анализ. Кроме того, оно может быть полезно студентам математических специальностей и экономистам, углубленно изучающим теорию вероятностей и теорию случайных процессов.

Оглавление

Введение

Понятие меры широко используется в математике. Оно возникло как обобщение хорошо известных понятий длины, площади, объема или массы. Кроме того, одним из примеров меры является вероятность. Интеграл Лебега, берущийся по произвольной мере, иллюстрирует общие идеи, которые используются при построении интегральных сумм, и помогает лучше понять, что такое «обычный» определенный интеграл, двойной, тройной или, например, n-кратный интегралы. Таким образом, знакомство с теорией меры и интегралом Лебега позволяет получить более полное представление об интегральном исчислении и приобрести навыки построения интегральных сумм в задачах прикладного характера. Кроме того, интеграл Лебега широко применяется в теории вероятностей и в теории случайных процессов. В частности, математическое ожидание как дискретной, так и абсолютно непрерывной случайной величины — это разновидности интеграла Лебега, взятого по различным мерам. Цель данного пособия — позволить студенту, знакомому с основами высшей математики, получить представление об общей теории меры и связанном с ней интегрировании. От читателя требуется знание основных понятий теории множеств и знакомство с интегральным исчислением. Кроме того, читатель должен помнить о том, как определялись площадь и объем в школьном курсе геометрии.

1. Предварительные сведения. Множества и действия над ними.

Напомним, что понятие *множества* принадлежит к числу основных неопределяемых понятий математики, таких же, какими являются понятия точки, прямой или плоскости в геометрии. Множество можно представлять себе как совокупность некоторых однородных объектов. Они называются *элементами* этого множества. Как правило, множества обозначаются прописными буквами A, B, ..., а их элементы — строчными буквами a, b, ... Запись $a \in A$ означает, что *элемент a принадлежит множеству A*. Если все элементы, из которых состоит A, входят и в какое-то другое множество B, то говорят, что A — это *подмножество* множества B: $A \subset B$. Если одновременно $B \subset A$, то множества A и B состоят из одних и тех же элементов. В этом случае они считаются равными: $A = B$. Иногда при изучении множеств приходится сталкиваться с множеством, не содержащим ни одного элемента. Такое множество называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Наоборот, зачастую все множества, возникающие в той или иной задаче, принадлежат какому-то общему, *основному* множеству, которые мы будем обозначать X.

Напомним также, что *объединением* двух множеств называется множество

$$A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ или } x \in B\}$$

(оно состоит из всех элементов x таких, что x принадлежит хотя бы одному из множеств A и B). Объединение двух произвольных множеств A и B условно изображают так, как показано на рисунке 1. *Пересечением* множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x\colon x \in A \text{ и } x \in B\},$$

изображенное на рисунке 2.

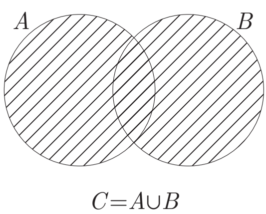


Рис. 1

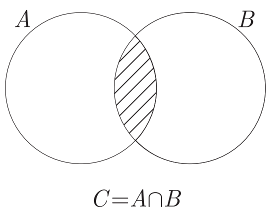


Рис. 2

Заметим, что свойства объединения и пересечения множеств во многом похожи на свойства суммы и произведения действительных чисел. В частности, этим операциям присущи

1) коммутативность $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,

2) ассоциативность $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

3) дистрибутивность $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Кроме того, имеет место и следующее равенство:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Разностью двух множеств A и B (см. рис. 3) называется множество

$$A \setminus B = \{x \colon x \in A, \text{ но } x \notin B\}.$$

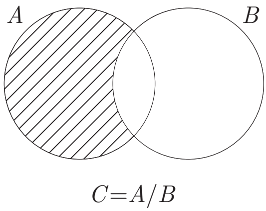


Рис. 3

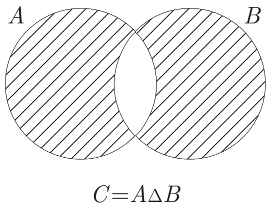


Рис. 4

Симметрическая разность множеств A и B (см. рис. 4) — это множество

$$A \triangle B = \{x \colon x \in A, \text{ но } x \notin B \text{ или } x \notin A, \text{ но } x \in B\}.$$

Наконец, *дополнение* множества A — это разность $X \setminus A$. Дополнение часто обозначают символом A' или $\overline{A}$ (см. рис. 5).

Поскольку операции объединения и пересечения множеств ассоциативны, мы можем рассматривать комбинации из трех, четырех и даже бесконечно большого числа множества. Например, множество

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

состоит из элементов x, входящих *хотя бы в одно* из множеств A_n. В частности,

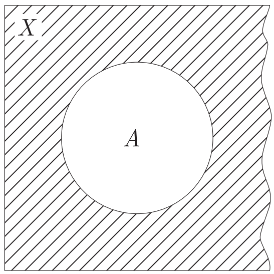
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [-n;\, n] = \mathbb{R}^1,$$

потому что для любого действительного числа x можно указать хотя бы один отрезок $[-n;\, n]$ такой, что $x \in [-n;\, n]$. Наоборот, пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ состоит их тех элементов x, которые входят *в каждое* из множеств A_n. Так,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n};\, \frac{1}{n}\right) = \{0\},$$

где $\{0\}$ обозначает множество, состоящее из одного только нуля, потому что для любого другого числа $a \neq 0$ можно указать такое n, что $|a| \geqslant \frac{1}{n}$, т. е. $a \notin \left(-\frac{1}{n};\, \frac{1}{n}\right)$. Иногда особое значение приобретают объединения *непересекающихся* множеств. Мы будем обозначать их символом $\sum$:

$$\sum_{n=1}^{k} A_n = \bigcup_{n=1}^{k} A_n, \text{ если } A_i \cap A_j = \varnothing \text{ для всех } i \neq j;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ если } A_i \cap A_j = \varnothing \text{ для всех } i \neq j.$$



$C{=}A'$

Рис. 5

При изучении множеств бывает удобно сначала рассматривать какие-то более простые, *элементарные* множества, а затем с их помощью получать все остальные интересующие нас множества. Пусть $\mathscr{A}$ — это *система* (т. е. какой-то набор) *элементарных множеств*, содержащая наибольшее возможное (в данной задаче или в данной теории) множество X. Рассмотрим все множества, которые можно получить из элементарных, применяя операции объединения, пересечения, разности и симметрической разности. Мы получим *алгебру* множеств, порожденную системой $\mathscr{A}$. В эту алгебру, например, войдут объединения элементарных множеств, их пересечения, объединения пересечений, пересечения объединений пересечений и. т. д.. Заметим, в частности, что эта алгебра обязательно содержит пустое множество, потому что его всегда можно представить в виде $\varnothing = A \setminus A$, где $A \in \mathscr{A}$. Если же мы будем рассматривать не только конечные, но и бесконечные объединения и пересечения

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,$$

где A_n, $A_k \in \mathscr{A}$, то полученный набор множеств будет называться *σ-алгеброй* (сигма-алгеброй) *множеств*, порожденной системой $\mathscr{A}$. Так, при изучении множеств на числовой прямой в качестве элементарных часто рассматривают всевозможные *полуинтервалы* $[a; b)$, где a, $b \in \mathbb{R}^1$, $a < b$. Соответствующая сигма-алгебра называется *борелевской* и обозначается $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$. Входящие в нее множества тоже называются борелевскими.

Вопросы и задания.

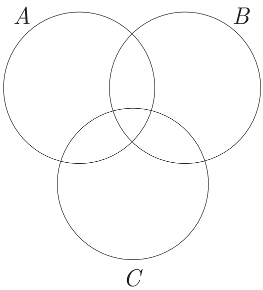


Рис. 6

1. Доказать графически следующие тождества:

а) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

б) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

в) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Указание. В последних двух задачах изобразить множества A, B и C так, как показано на рис. 6.

2. Доказать, что каковы бы ни были множества A и B, принадлежащие некоторой алгебре, множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $A \triangle B$ принадлежат той же самой алгебре.

Указание. Воспользоваться тем, что A и B — это комбинации каких-то элементарных множеств.

3. Записать $A \cup B$ и $A \setminus B$ с помощью операций $\triangle$ и $\cap$, примененных к множествам A, B и X. Объяснить,почему при построении алгебры достаточно рассматривать только симметрические разности и пересечения элементарных множеств.

4. Показать, что справедливы следующие равенства:

а) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \Big[a;\, a + \frac{1}{n}\Big) = \{a\}$,

б) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[a + \frac{1}{n};\, b\Big) = (a;\, b)$, в) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[a;\, b+\dfrac{1}{n}\right) = [a;\, b]$.

5. Равенства, записанные в задании 4, означают, что множества вида $\{a\}$, $(a;\, b)$, $[a;\, b]$ — борелевские. Объяснить, почему полуинтервалы $(a;\, b]$ — тоже борелевские множества.

6. Показать, что при построении борелевской σ-алгебры $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$ в качестве элементарных множеств можно рассматривать не полуинтервалы $[a;\, b)$, а интервалы $(a;\, b)$.

Указание. Рассуждая так же, как в задании 4, показать, что полуинтервалы $[a;\, b)$ и $(a;\, b]$, а также отрезки $[a;\, b]$ можно записать как бесконечные объединения или пересечения некоторых интервалов.

2. Счетные и несчетные множества.

Сравнивая свойства двух множеств, бывает полезно выяснить, которое из них содержит больше элементов, а для этого следует найти так называемую *мощность* множества. Если множество A *конечно*, т. е. содержит конечное число элементов, то его мощность, обозначаемая $|A|$, совпадает с количеством элементов этого множества. Для того чтобы научиться определять мощность *бесконечного* множества (содержащего бесконечно много элементов), введем понятие отображения.

Пусть нам заданы два множества A и B и некоторое правило, позволяющее каждому элементу a из множества A сопоставить какой-то элемент b из множества B. Тогда говорят, что задано *отображение*, действующее из множества A в множество B. Если обозначить это отображение через f, то пишут:

$$\begin{gathered} f\colon A \to B, \\ a \mapsto f(a), \end{gathered}$$

где $f(a)$ обозначает элемент b. В этом случае элемент b называется *образом* элемента a. Заметим, что один и тот же элемент b может служить образом для нескольких элементов множества A. Определим *полный прообраз* элемента b как множество всех $a \in A$ таких, что $f(a) = b$, т. е.

$$f^{-1}(b) = \{a \in A\colon f(a) = b\}.$$

Если B_1 — какое-то подмножество множества B, то мы можем определить полный прообраз $f^{-1}(B_1)$:

$$f^{-1}(B_1) = \{a \in A\colon f(a) \in B_1\}.$$

Подчеркнем еще раз, что полный прообраз — это *множество*, хотя иногда оно может состоять из одного элемента. Можно доказать, что для любого отображения f выполняются следующие равенства:

$$\begin{gathered} f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{gathered}$$

Среди всех отображений наибольшее значение имеют так называемые *взаимно однозначные* отображения, или *биекции*. Для того чтобы отображение f было взаимно однозначным, должны выполняться два условия:

1) никакие два элемента из множества A не могут перейти в один и тот же элемент из множества B:

$$a_1,\, a_2 \in A, \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

(в этом случае f называется *инъекцией*);

2) для любого элемента b из множества B существует такой элемент $a \in A$, что $f(a) = b$ (в этом случае f называется *сюръекцией*).

На рис. 7 показано, как действует отображение f, удовлетворяющее только первому условию (7а), только второму (7б) и обоим условиям одновременно (7в).

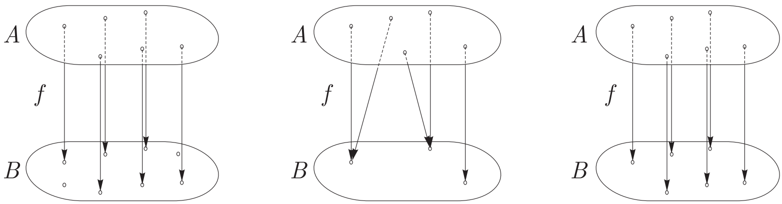


Рис. 7

Можно заметить, что множества A и B, между которыми установлено взаимно однозначное отображение, состоят из одинакового числа элементов. Это наблюдение, верное в случае конечных множеств, обобщается на случай множеств бесконечных. А именно, считается,что *мощности множеств A и B совпадают: $|A| = |B|$ — если между этими множествами можно установить взаимно однозначное отображение.* При этом множества A и B называются *эквивалентными*. Таким образом, желая найти мощность какого-то бесконечного множества, строят его взаимно однозначное отображение на другое множество с уже известной мощностью.

Наиболее простым из бесконечных множеств является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Его мощность принято обозначать символом $\aleph_0$ (алеф-нуль) или c_0. Множества, эквивалентные $\mathbb{N}$, называются *счетными*. Таким образом, мощность любого счетного множества равна $\aleph_0$. Рассмотрим несколько примеров.

1. Множество неотрицательных целых чисел $\{0,\, 1,\, 2,\, \ldots\}$, казалось бы, должно содержать «на один элемент больше», чем множество $\mathbb{N}$. На самом деле мощности этих множеств совпадают. Взаимно однозначное отображение показано на рис. 8. Заметим, что в случае конечных множеств это отображение не было бы взаимно однозначным, потому

что у «последнего» элемента «пары» не нашлось бы. Но у бесконечных множеств «последнего» элемента нет, поэтому множество неотрицательных целых чисел оказывается счетным. (Говорят, что мы смогли *занумеровать* его элементы, *пересчитать* их, отсюда и называние — *счетное.*)

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

Рис. 8

2. Множество неотрицательных четных чисел тоже счетно. Соответствующее взаимно однозначное отображение показано на рис. 9[1].

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \end{array}$$

Рис. 9

3. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счетно. Здесь взаимно однозначное отображение выглядит сложнее (см. рис. 10).

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \end{array}$$

Рис. 10

4. Множество пар целых чисел $\mathbb{Z}^2$ счетно. Чтобы построить взаимно однозначное отображение из $\mathbb{Z}^2$ в $\mathbb{N}$, представим $\mathbb{Z}^2$ как множество точек на плоскости, имеющих целые координаты. Затем покажем, как мы будем из нумеровать (на рис. 11 первым по счету элементом счита-

[1]Заметим, что множество неотрицательных нечетных чисел по тем же соображениям тоже является счетным, так что в итоге одно счетное множество $\mathbb{N} \cup \{0\}$ можно записать как объединение двух эквивалентных ему множеств: «половина равна целому»!

ется $(0;0)$, а стрелочкой показано, как выбирать каждый следующий элемент).

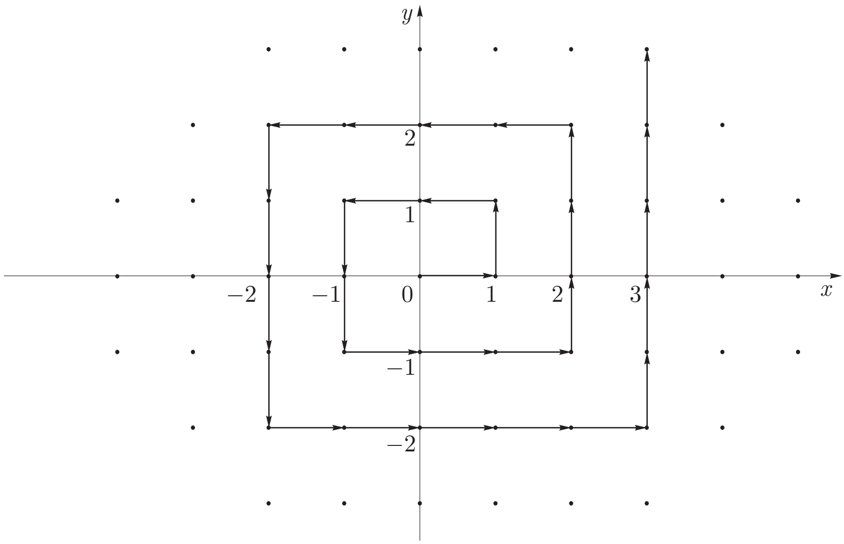


Рис. 11

5. Множество положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}_+$ счетно (впрочем, все множество $\mathbb{Q}$ тоже счетно). Мы воспользуемся тем, что любое положительное рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Занумеруем эти дроби так, как показано на рис. 12 (дроби, соответствующие уже сосчитанному рациональному числу, пропускаются).

Можно доказать, что счетные множества — «самые маленькие» из всех бесконечных множеств. Иначе говоря, нет такого бесконечного множества, которое было бы менее, чем счетно. Однако существуют и *несчетные* (т. е. более, чем счетные) бесконечные множества. Примером несчетного множества служит отрезок $[0;\,1]$. Чтобы доказать его несчетность, предположим, что нам удалось занумеровать все числа из отрезка $[0;1]$. Напомним, что все эти числа можно представить как бесконечные десятичные дроби, которые начинаются с цифры 0 (единице соответствует дробь 0,999...). Тогда запишем все числа из отрезка $[0;1]$

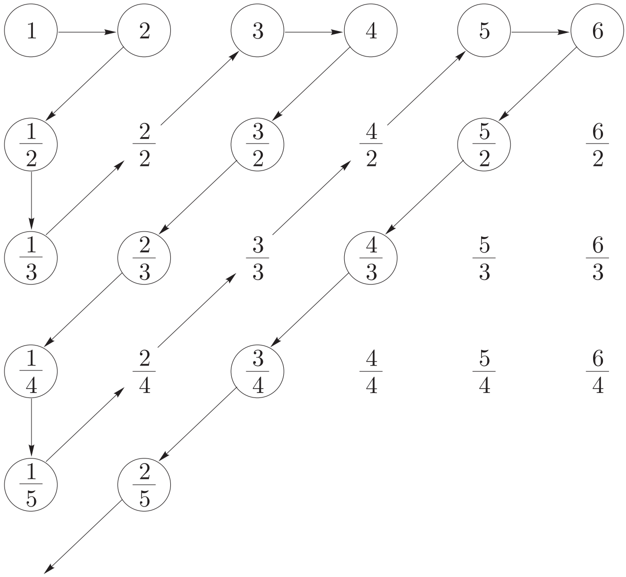


Рис. 12

в порядке возрастания их номеров:

$$
\begin{array}{l}
x_1 = 0,\ x_{11}\ , x_{12}\ x_{13}\ \ldots \\
x_2 = 0,\ x_{21}\ , x_{22}\ x_{23}\ \ldots \\
x_3 = 0,\ x_{31}\ , x_{32}\ x_{33}\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Здесь x_{11}, x_{12}, ... — это цифры, входящие в запись числа x_1. Теперь рассмотрим следующее число

$$y = 0,\ y_1 y_2 y_3 \ldots,$$

полученное с помощью так называемой *диагональной процедуры Кантора.* Первая цифра этого числа, т. е. y_1, не совпадает с цифрой x_{11}. Вторая цифра y_2 не совпадает с x_{22}. И вообще, каждый раз y_n не совпадает с x_{nn}. Если учесть, что каждая из цифр x_{nn} принимает лишь одно из десяти возможный значений, мы всегда сможем выбрать необходимое нам y_n. Теперь наше число y не совпадает с числом x_1: у них различаются первые цифры после запятой. Не может оно и совпасть с x_2: у них различны вторые цифры после запятой. И вообще, y не совпадает ни с одним из x_n. В то же время очевидно, что $y \in [0;\, 1]$. Полученное противоречие доказывает несчетность отрезка $[0; 1]$.

В дальнейшем мы будем уделять особое внимание счетным множествам. Заметим, что суммы $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, фигурирующие в определении σ-алгебры, являются *счетными*, т. к. суммирование ведется по элементам счетного множества $\mathbb{N}$. В принципе, можно рассматривать и несчетные объединения множеств, например,

$$\bigcup_{\alpha \in [0;\, 1]} A_\alpha.$$

Если взять $A_\alpha = \{\alpha\}$, то

$$\bigcup_{\alpha \in [0;\, 1]} A_\alpha = [0;\, 1].$$

Вопросы и задания.

1. Будет ли функция одной переменой, знакомая вам по курсу математического анализа (или высшей математики), отображением? Если да, то чему в этом случае равны множества A и B?

2. Как вы думаете, всегда ли выполняются следующие равенства:

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2),$$
$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

Здесь $f(A_i)$ обозначает *образ множества* A_i, т. е.

$$f(A_i) = \{b \in B \colon \exists a \in A_i,\ f(a) = b\}.$$

3. Если вы знакомы с латинским языком, то попробуйте объяснить происхождение терминов «биекция», «инъекция» и «сюръекция».

4. Придумайте формулы для взаимно однозначных отображений, заданных на рис. 8, 9 и 10.

5. Докажите счетность следующих множеств:

а) множества чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a,\, b \in \mathbb{Z}$,

б) множества всех целых чисел, кратных трем, в) множества всех точек $(a;\, b;\, c)$ с натуральными координатами,

г) множества всех квадратных трехчленов с целыми коэффициентами.

6. При доказательстве несчетности отрезка $[0;1]$ мы не учли тот факт, что иногда две десятичные дроби соответствуют одному и тому же действительному числу, например:

$$0,5000\ldots = 0,49999\ldots$$

Как изменить диагональный процесс Кантора с учетом этого обстоятельства?

Как изменится доказательство, если от десятичной перейти к двоичной записи чисел?

7. Используя функцию

$$y = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2},$$

докажите, что отрезок $[0;1]$ и множество действительных чисел $\mathbb{R}^1$ эквивалентны.

3. Мера, измеримые множества.

Как уже было сказано во введении, понятие меры обобщает такие понятия, как длина отрезка, площадь фигуры, объем или масса тела. Напомним, что в геометрии площадь фигуры и объем тела определяются следующим образом ([2]).

Площадь — это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1) равные фигуры имеют равные площади,

2) если фигура разбивается на части, то площадь этой фигуры равна сумме площадей ее частей,

3) площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.

Легко доказать, что данное определение позволяет вычислять площадь любой плоской фигуры, которую можно разбить на конечное число треугольников. Такие фигуры называются *простыми.*

Аналогично, *объем* определяется как положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1) равные тела имеют равные объемы,

2) если тело разбито на части, то объем этого тела равен сумме объемов его частей,

3) объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.

Это определение позволяет вычислять объем любого *простого* тела, т. е. тела, которое можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

Как видим, определения площади и объема во многом схожи. Постараемся отметить наиболее важные черты этих определений. Во-первых, в них подчеркивается, что площадь и объем — величины положительные. Поскольку в принципе мы можем рассматривать и фигуры нулевой площади (например, отрезок) или нулевого объема (любая плоская фигура), то достаточно будет потребовать *неотрицательности* площадей и объемов. Второе важное свойство состоит в том, что площадь или объем целого равны сумме площадей или объемов частей. Это свойство мы будем называть *аддитивностью.* Отметим, что в элементарной математике плоская фигура или тело разбивается на конечное число частей, хотя в определении об этом и не говорилось. Далее, площади одинаковых фигур или объемы одинаковых тел должны совпадать.Наконец, изначально площадь и объем задаются для каких-то *наиболее простых* фигур и тел, что впоследствии позволяет находить площади и объемы фигур и тел более сложных. В определении упоминаются квадрат и куб со стороной, равной единице измерения, хотя в действительности, используя свойства равных фигур и тел, можно сразу определить площади треугольников и объемы треугольных пирамид. Именно треугольники и треугольные пирамиды, а также всевозможные (конечные) их комбинации и выступают в качестве *простых* множеств при определении площади и объема соответственно. В этом смысле круг и тела вращения простыми уже не будут, т. к. при нахождении их площадей и объемов нам потребуется *бесконечно много* пирамид и треугольников.

Теперь попробуем, основываясь на определениях площади и объема, записать аналогичные определения для длины и массы. (В элементарной математике формального определения длины не дается, потому что вычисление длины, как правило, не вызывает никаких затруднений.)

Итак, *длина* — это неотрицательная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1) равные кривые (если мы ограничиваемся действительной прямой, то в качестве кривых выступают конечные объединения отрезков, полуинтервалов или интервалов) имеют равные длины,

2) если кривая разбита на части, то ее длина равна сумме длин ее частей,

3) длина отрезка $[0;1]$ равна единице.

Теперь перейдем к определению массы. Конечно, масса тела — это неотрицательная величина. Однако от свойства 1) нам придется отказаться, потому что массы двух равных тел не обязательно равны: все зависит от плотности этих тел. Свойство аддитивности сохраняется:

2) если тело разбивается на части, то его масса равна сумме масс его частей.

Формально можно переформулировать и последнее из свойств:

3) тело единичного объема и единичной плотности имеет массу, равную единице.

Отметим, что это условие позволит нам найти массу простых тел, имеющих единичную или хотя бы постоянную плотность, но вычислять массу тела, обладающего переменной плотностью, мы пока не умеем.

Итак, мы видим, что при определении массы свое значение сохраняют только два свойства из четырех: неотрицательность и аддитивность. Именно эти свойства, как наиболее важные, и участвуют в определении меры.

А именно, пусть $\mathscr{A}$ — некоторая алгебра множеств. Множества, входящие в алгебру $\mathscr{A}$, мы будем называть, как и раньше, *элементарными*. Пусть на алгебре $\mathscr{A}$ задана функция $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^1$ (т. е. каким-то образом указано правило, по которому любому элементарному множеству $A \in \mathscr{A}$ ставится в соответствие действительное число $\mu(A)$), обладающая следующими свойствами :

1) $\mu(A) \geqslant 0$ для всех $A \in \mathscr{A}$ (неотрицательность);

2) если A — это объединение конечного числа непересекающихся элементарных множеств:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i, \qquad A_i \in \mathscr{A},$$

то

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

(аддитивность).

Тогда говорят, что на алгебре $\mathscr{A}$ задана *мера* μ.

Таким образом, возникающие в элементарной геометрии тела или фигуры, разбитые на несколько труегольников или пирамид — это частный случай множеств, равных объединению непересекающихся элементарных множеств.

Свойство аддитивности можно записать так:

$$\mu\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

В дальнейшем его заменяют на более сильное свойство *счетной аддитивности* (или σ-*аддитивности*):

$$\mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Таким образом, мы можем разбивать множество A и на *бесконечно много* частей, лишь бы число этих частей было *счетным.*

Множества из алгебры $\mathscr{A}$, на которых задана мера μ, обычно называют *измеримыми.* Отметим, что, поскольку $\mathscr{A}$ — это алгебра, то множества $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \cap B$ и $A \triangle B$ измеримы для любых измеримых A и B. Кроме того, $\overline{A}$ измеримо для любого измеримого A. Если мы требуем не просто аддитивности, а σ-аддитивности, то и алгебра $\mathscr{A}$ должна быть σ-алгеброй.

Как видим, в определении меры не указано, каким именно способом можно задать функцию μ. О том, как это сделать, мы поговорим в следующем разделе. Пока же заметим, что для определения обычной длины, площади и объема в качестве элементарных множеств достаточно будет рассматривать всевозможные отрезки $[a;\, b]$, прямоугольники $[a_1;\, b_2] \times [a_2;\, b_2]$ и прямоугольные параллелепипеды $[a_1;\, b_2] \times [a_2;\, b_2] \times [a_3;\, b_3]$ соответственно.

Конечно, плоские фигуры и тела в пространстве нельзя свести к одним только прямоугольникам и параллелепипедам со сторонами, параллельными осям координат. Да и в других случаях, когда мы определили меру на какой-то относительно небольшой σ-алгебре $\mathscr{A}$ (чем меньше множеств и чем они проще, тем удобнее найти формулу, позволяющую задать их меру), хочется научиться вычислять меру и для других, более сложных множеств. В этом случае говорят о *продолжении* меры с σ-алгебры $\mathscr{A}$ на другую, более широкую σ-алгебру. Прежде чем объяснить, как это можно сделать, напомним о понятии *инфинума*, которое играет заметную роль в математическом анализе.

Пусть $Y = \{y\} \subset \mathbb{R}^1$ — некоторое числовое множество. Число c называется *инфинумом* множества Y, $c = \inf Y$, когда выполняются следующие условия:

1) c не превосходит элементов множества Y:

$$\forall\, y \in Y : c \leqslant y;$$

2) если мы слегка увеличим c, то новое число $c + \varepsilon$ этим свойством обладать уже не будет:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, y \in Y : y < c + \varepsilon.$$

Инфинум множества еще называют *точной нижней гранью* этого множества: инфинум нельзя увеличить, т. к. тогда он уже не будет меньше или равен всем элементам из Y, но и уменьшить его тоже нельзя, потому что тогда перестанет выполняться вторая часть определения (см. рис. 13).

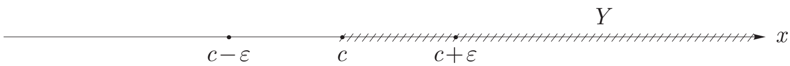


Рис. 13

Зачастую инфинум совпадает с *минимумом* множества, но это происходит не всегда. Например, инфинум интервала $(0; 1)$ равен нулю, а минимум не существует, потому что число ноль не входит в интервал $(0; 1)$. Иногда инфинум может равняться $-\infty$. Можно доказать, что у любого числового множества инфинум, конечный или бесконечный, обязательно существует.

Понятие инфинума понадобится нам для того, чтобы продолжать меру μ с σ-алгебры элементарных множеств $\mathscr{A}$ на более широкие системы множеств. Сделать это можно по-разному, но чаще всего используется так называемое *продолжение меры по Лебегу*. А именно, пусть мера μ задана на некоторой σ-алгебре $\mathscr{A}$. Для любого другого множества B (конечно, $B \subset X$) назовем его *внешней мерой* число, равное

$$\mu^*(B) = \inf_{\substack{A \in \mathscr{A} \\ B \subset A}} \mu(A).$$

Заметим, что для каждого элементарного множества A его мера $\mu(A)$ — неотрицательное число, так что множество мер $\mu(A)$ — это числовое множество, и у него обязательно существует инфинум. Кроме того, этот инфинум конечен, потому что он заведомо неотрицателен. Можно доказать, что если исходная мера μ была σ-аддитивна на σ-алгебре $\mathscr{A}$, то и внешняя мера μ^* будет σ-аддитивна, уже на множестве всех подмножеств из X. Итак, у внешней меры μ^* есть оба свойства меры, что и оправдывает ее название.

Процесс вычисления внешней меры чем-то напоминает вычисление площади круга как предела площадей вписанных и описанных правильных многоугольников, у которых число сторон неограниченно возрастает. Различие в том, что круг мы приближали многоугольниками с двух сторон: снаружи и изнутри, причем пределы, найденные в обоих случаях, совпадали. Находя внешнюю меру, мы приближаем множество B только «снаружи», а это означает, что мы не знаем, насколько точно нам удалось оценить меру множества B: вдруг у нас просто не нашлось достаточно близких к нему элементарных множеств (см. рис. 14)? Поэтому нам придется выделить класс множеств, у которых внешняя мера позволяет оценить «настоящую» меру достаточно точно. А именно, назовем множество B *измеримым по Лебегу*, если для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество $A \in \mathscr{A}$, что

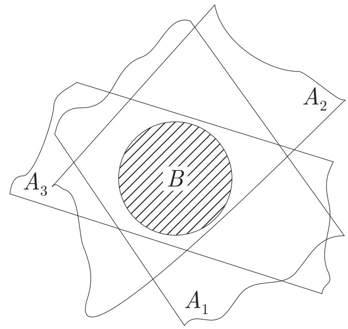


Рис. 14

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Поскольку множество $A \triangle B$ тем меньше, чем меньше разница между A и B, последнее неравенство как раз и гарантирует нам точность оценки $\mu^*(B)$.

Если рассматривать внешнюю меру μ^* только на измеримых по Лебегу множествах, то мы получим *меру Лебега*, которую будем обозначать через m. Можно доказать, что все множества, измеримые по Лебегу, образуют σ-алгебру (с тем же самым X), и мера Лебега σ-аддитивна на этой σ-алгебре. Конечно, мера Лебега m существенно зависит от того, как мы определяли изначальную меру μ. В частности, если

$$\mu([a; b]) = b - a,$$

то все борелевские множества будут измеримыми (по Лебегу), и мера Лебега совпадет с обычной длиной. Если по определению

$$\mu([a_1; b_1] \times [a_2; b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2),$$

то мера Лебега совпадет с площадью и, по крайней мере, все простые фигуры будут измеримыми по Лебегу. То же самое верно и для объемов.

Сравнивая вычисление площадей в элементарной математике, где за основу фактически берется площадь треугольника, и в высшей математике (через определенный интеграл), мы видим, что в первом случае класс элементарных множеств шире, но класс измеримых множеств в конечном счете оказывается у́же, чем во втором. Фактически, измеримыми (простыми) в элементарной математике являются только многоугольники. Даже площадь круга определена не вполне корректно: мы рассматриваем исключительно *правильные* многоугольники, к тому же не какие угодно, а только вписанные в круг или описанные вокруг него, и неизвестно, какой результат может получиться, если приближать круг *любыми* многоугольниками, потребовав, чтобы все их стороны были бесконечно малы (см. задание 15).

Когда мы вычисляем площадь фигуры с помощью определенного интеграла, мы рассматриваем в качестве элементарных множеств исключительно прямоугольники, причем только со сторонами, параллельными осям координат. Более того, основания этих прямоугольников всегда лежат на оси абсцисс (см. рис. 15).

(Заметим, что множество таких прямоугольников достаточно легко продолжить до алгебры и даже до σ-алгебры. Во всяком случае, и пересечение, и симметрическая разность двух прямоугольников вышеуказанного вида — это один или два прямоугольника того же вида.) Конечно, при таком узком наборе элементарных множеств площадь даже очень простых фигур, например, треугольника, приходится вычислять, рассматривая *бесконечные* объединения прямоугольников. Зато в конечном счете оказывается, что мы можем найти площадь у гораздо большего количества фигур: по крайней мере, у любой криволинейной трапеции, ограниченной сверху непрерывной функцией. (Можно

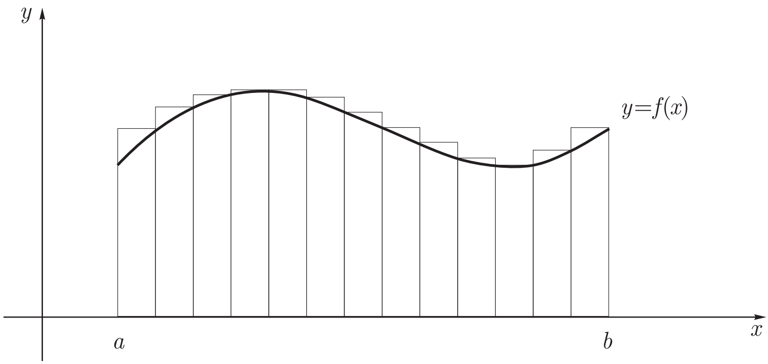


Рис. 15

сообразить, что чем шире класс элементарных множеств, тем выше вероятность «противоречивого» определения площади, когда разные приближения приводят к разным результатам, из-за чего множество и оказывается неизмеримым.) Кроме того, при построении определенного интеграла мы используем только свойства неотрицательности и σ-аддитивности площади. Тот факт, что площади равных фигур равны, не учитывается, а это существенно для обобщения на случай произвольной меры.

Теперь приведем пример меры, непохожей на рассмотренные ранее. А именно, пусть X — это множество, содержащее конечное (или счетное) число точек:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad \text{или}$$
$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Алгебра $\mathscr{A}$ состоит из всевозможных подмножеств множества X. Поскольку $\mathscr{A}$ содержит *все* подмножества из X, это, очевидно, алгебра и даже σ-алгебра. Сопоставим каждой точке x_i некоторое положительное число — меру этой точки, которую мы будем обозначать $\mu(x_i)$. Тогда для любого множества $A \in \mathscr{A}$ определим

$$\mu(A) = \sum_{x_i \in A} \mu(x_i).$$

Заданная таким образом мера обладает свойствами неотрицательности и σ-аддитивности. Заметим, что в данном случае нам даже не пришлось строить продолжение этой меры по Лебегу, т. к. измеримыми оказались все множества, вложенные в X. Чаще всего множество X понимают как *множество точечных масс*, находящихся в вакууме или в среде, массой которой можно пренебречь. Кроме того, подобные множества возникают в теории вероятностей, где они понимаются как *пространства элементарных событий*, каждое из которых имеет определенную положительную вероятность.

При изучении меры Лебега может возникнуть впечатление, что в большинстве случаев измеримыми по Лебегу должны оказаться все множества, содержащиеся в X, а неизмеримых множеств попросту не существует. В действительности это не так: даже на числовой прямой с σ-алгеброй борелевских подмножеств и с мерой Лебега, равной обычной длине, существуют множества, неизмеримые по Лебегу. Правда, структура этих множеств довольно сложна и их описание требует хорошего знания теории действительных чисел. А для того чтобы неизмеримым оказалось достаточно простое множество (как на рис. 14), необходимо задавать меру либо очень сложным, либо очень искусственным образом.

Вопросы и задания.

1. Используя определение меры, докажите следующие ее свойства:

а) $\mu(\varnothing) = 0$,

б) если $A \subset B$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $B = A \cup (B \setminus A)$, причем эти множества не пересекаются.

в) $\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

и результатом пункта б).

г) если множество A элементарное, то оно измеримо по Лебегу и $\mu^*(A) = m(A) = \mu(A)$.

2. Пусть мера задана на σ-алгебре борелевских множеств $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$, причем по определению $\mu[a;\, b] = b - a$, где $a \leqslant b$. Объясните, почему $m(a;\, b] = b - a$.

3. Пусть мера Лебега совпадает с обычной длиной на числовой прямой $\mathbb{R}^1$. Тогда $m\{a\} = 0$. (Напомним, что $\{a\}$ — это множество, состоящее из одной точки a.) В то же время $m[0;\, 1] = 1$, хотя

$$[0;\, 1] = \sum_{a \in [0;1]} \{a\}.$$

Нет ли здесь противоречия со свойствами меры?

4. Задайте на единичной окружности меру, совпадающую с обычной длиной. Для этого решите, какие множества вы выберете в качестве элементарных и как вы будете вычислять их меру.

5. Предположим, что Вам задано конечное множество точечных зарядов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Определим $\mu(x_i)$ как заряд точки x_i. Можно ли, исходя из чисел $\mu(x_i)$, получить меру на σ-алгебре всех подмножеств множества X, как это было сделано для точечных масс?

Указание. Здесь и в следующих задачах надо проверять, выполняются ли свойства неотрицательности и σ-аддитивности.

6. Будут ли мерами:

а) длина произвольной кривой на плоскости (напомним, что ее можно сосчитать с помощью криволинейного интеграла или по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt,$$

где

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

— параметрические уравнения кривой);

б) площадь произвольной поверхности (в пространстве)?

7. Предположим, что Вы владеете сетью предприятий, которые мы обозначим $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть $\mu(x_i)$ — это прибыль (или убыток), которую принесло вам i-ое предприятие за последний год. Можно ли с помощью чисел $\mu(x_i)$ задать меру на множестве Ваших предприятий?

8. Предположим, что у Вас есть таблица, в которой по каждому из регионов Российской Федерации приведены следующие данные:

а) численность населения,

б) объем добычи полезных ископаемых,

в) средняя заработная плата,

г) прожиточный минимум,

д) объем спроса на данный вид товара.

В каком из случаев на основании имеющихся данных можно построить меру на множестве регионов Российской Федерации?

9. Предположим, что в условиях задания 8 у Вас имеется не только таблица, но и карта Российской Федерации, на которой те же самые данные представлены непрерывным образом: то есть мы можем получить эти данные для произвольного участка, выбранного на карте. В каком из случаев они будут задавать меру? (Измеримые множества можно выбирать так же, как при поиске площади плоских фигур).

10. Пусть действительная прямая (точнее, какой-то ее отрезок) отождествляется с осью времени, а в каждой ее точке задано число — курс доллара в данный момент времени. Можно ли с помощью этих данных задать на выбранном отрезке какую-то меру? Каков будет ее экономический смысл? Можно ли вместо отрезка рассматривать всю прямую $\mathbb{R}^1$?

11. Предложите другой, более правильный с экономической точки зрения способ определить измеримые множества в задании 9. (Учтите, что они должны образовывать алгебру.)

12. Пусть множество X состоит из трех точек: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Определим

$$\mu(x_1) = \frac{1}{3}, \qquad \mu(x_2) = \frac{1}{2}, \qquad \mu(x_3) = \frac{1}{6}.$$

Найдите меру всех остальных подмножеств множества X.

13. Почему, определяя меру так, как это делалось с точечными массами или вероятностями элементарных событий, мы можем рассматривать только конечные или счетные множества X?

14. Пусть μ и ν некоторые меры, а c — константа. Будут ли мерами

а) $\mu + c$, если $c > 0$,

б) $\mu + c$, если $c < 0$,

в) $c \cdot \mu$, где $c > 0$,

г) $\mu + \nu$,

д) $\mu \cdot \nu$?

(Если $\mu_1 = \mu + c$, то $\mu_1(A) = \mu(A) + c$ для любого измеримого множества A.)

15. Предположим, что при вычислении площади круга D мы решили приблизить его многоугольником P, состоящим из n одинаковых четырехугольников (см. рис. 16).

а) Вычислить площадь четырехугольника $OA_1B_1A_2$ как сумму площадей треугольников OA_1B_1 и OA_2B_1.

б) Найти площадь многоугольника P и выяснить, к чему стремится площадь $S(P)$ при $n \to \infty$.

в) Показать, что,

$$S(D \triangle P) \leqslant n(S_{A_1B_1A_2} + S_{B_1A_2B_2}).$$

г) Показать, что при $n \to +\infty$ $S_{A_1B_1A_2}$ и $S_{B_1A_2B_2}$ бесконечно малы. Оценить $S(D \triangle P)$.

д) Объяснить полученные результаты.

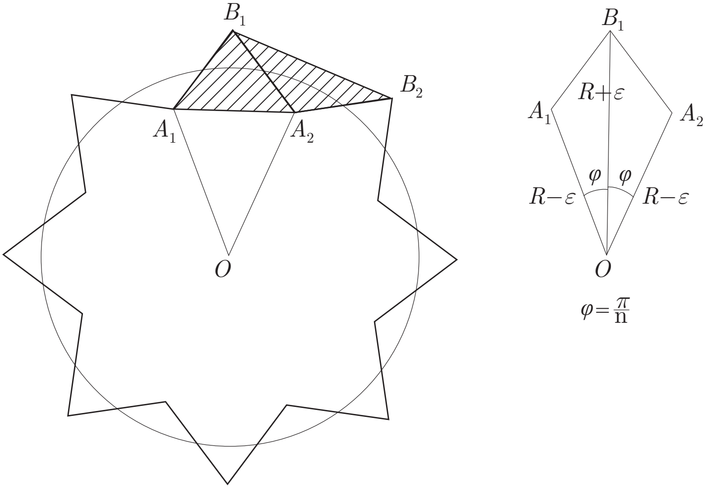


Рис. 16

4. Абсолютно непрерывные и дискретные меры.

Вернемся к задаче о вычислении массы, но для удобства будем рассматривать не массу некоторого тела, а массу отрезка, плотность которого изменяется от точки к точке. Обозначим эту плотность $\rho(x)$, где x — координата соответствующей точки, $x \in [a;\, b]$. Мы будем предполагать, что функция $\rho(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, то есть плотность изменяется непрерывно. Изобразим график функции $\rho(x)$ так, как показано на рис. 17.

Теперь разобьем отрезок $[a;\, b]$ на несколько частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Если расстояние между точками x_i и x_{i+1} достаточно мало, то плотность на отрезке $[x_i;\, x_{i+1}]$ не успеет сильно измениться, так что $\rho(x_i) \approx \rho(x_{i+1})$. Кроме того, $\rho(x_i) \approx \rho(\widehat{x})$, где $\widehat{x}$ — любая точка из отрезка $[x_i,\, x_{i+1}]$. Таким образом, мы можем считать, что на отрезке $[x_i,\, x_{i+1}]$ плотность почти постоянна. Выберем одно из возможных значений этой плотности и обозначим его ρ_i. Тогда масса отрезка $[x_i,\, x_{i+1}]$ примерно равна $\rho_i \cdot (x_{i+1} - x_i)$, что графически соответствует площади прямоугольника со сторонами ρ_i и $(x_{i+1} - x_i)$, изображенного на рис. 18. А масса всего отрезка $[a;\, b]$ примерно равна сумме масс его

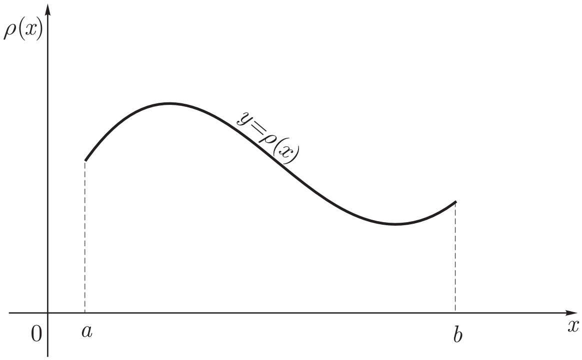


Рис. 17

частей $[x_i,\, x_{i+1}]$, что графически соответствует общей площади всех таких прямоугольников:

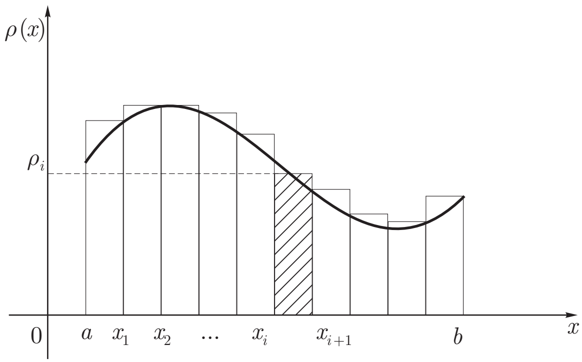


Рис. 18

$$m_{[a;b]} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i (x_{i+1} - x_i).$$

Мы видим, что это интегральная сумма, такая же, какая возникала при определении площади криволинейной трапеции. Иначе говоря, при измельчении разбиения, когда

$$\lambda = \max_{i=0,1,\ldots,n-1} |x_{i+1} - x_i|$$

бесконечно мало, мы получим определенный интеграл, который даст нам точное значение искомой массы:

$$m_{[a;b]} = \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

Если теперь $\rho(x)$ задана не только на отрезке $[a;\,b]$, а на всей числовой прямой, то, пользуясь этой формулой, мы сможем найти массу любого отрезка и любого (конечного) объединения отрезков, а также полуинтервалов и интервалов. (Заметим, что масса отдельной точки очевидно равна нулю:

$$m_{\{a\}} = \int_a^a \rho(x)\,dx = 0,$$

поэтому $m_{(a;b)} = m_{[a;b)} = m_{[a;b]}$.)

Более того, можно доказать, что определенная таким образом масса не только аддитивна, но и счетно-аддитивна. Кроме того, при $\rho(x) \geqslant 0$ она неотрицательна. Итак, формула

$$m_{[a;b]} = \int_a^b \rho(x)\,dx$$

задает нам меру на числовой прямой $\mathbb{R}^1$. Если вместо функции $\rho(x)$ рассматривать произвольную функцию $f(x) \geqslant 0$, то интеграл уже нельзя будет истолковать как массу отрезка, но он по-прежнему будет задавать некоторую меру на $\mathbb{R}^1$. Такую меру принято называть *абсолютно непрерывной.* Функцию $f(x)$, стоящую под знаком интеграла, принято называть *плотностью* этой меры (по аналогии с функцией $\rho(x)$ в задаче о поиске массы). Конечно, функция $f(x)$ должна быть *неотрицательной*: $f(x) \geqslant 0$. Кроме того, она должна быть *интегрируемой.* Напомним, что интегрируемые функции либо непрерывны, либо имеют конечное или счетное число точек разрыва первого рода. В частности, все элементарные функции интегрируемы в пределах своей области определения.

Заметим, что все абсолютно непрерывные меры обладают одним общим свойством: мера отдельной точки всегда равна нулю. Поскольку любая мера σ-аддитивна, то и любое *счетное* множество точек имеет меру нуль. Теперь рассмотрим другую крайность: меру, сосредоточенную на каком-то конечном или счетном множестве точек (мы уже встречались с ней в предыдущем разделе). А именно, пусть

$$X \subset \mathbb{R}^1, \qquad X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Для каждой точки $x_i \in X$ известна ее мера $\mu(x_i)$. *Мера любого множества, не содержащего точек из X, равна нулю.* Точнее, если $A \subset \mathbb{R}^1$, то

$$\mu(A) = \sum_{x_i \in A} \mu(x_i).$$

Заданная таким образом мера обладает свойствами неотрицательности и σ-аддитивности. Эту меру принято называть *дискретной.*

Хотя абсолютно непрерывная и дискретная меры кажутся полностью противоположными друг другу, существует способ, позволяющий задавать обе эти меры единообразно. А именно, вспомним, что по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. Таким образом, если μ — некоторая абсолютно непрерывная мера на $\mathbb{R}^1$, а $f(x)$ — ее плотность, то

$$\mu[a;b] = F(b) - F(a).$$

Функцию $F(x)$ называют *производящей функцией* меры μ[2]. Поскольку $F(x)$ — это первообразная какой-то интегрируемой функции, $F(x)$ является непрерывной. Кроме того, $F(x)$ не убывает, потому что $f(x)$ неотрицательна: если мы определим

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx,$$

[2] В теории вероятностей ей соответствует функция распределения случайной величины.

то

$$F(x+\Delta x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(x)\,dx = \int\limits_a^{x} f(x)\,dx + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx =$$

$$= F(x) + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx \geqslant F(x),$$

для любого $\Delta x > 0$. (Если отодвигать вправо правую границу криволинейной трапеции, то ее площадь будет расти.)

Оказывается, производящую функцию можно использовать и для определения дискретной меры. Рассмотрим такой пример. Пусть множество X конечно, $X = \{1,\,2\}$. Определим $\mu(1) = 2$, $\mu(2) = 3$. Зададим функцию $F(x)$ так, как показано на рис. 19.

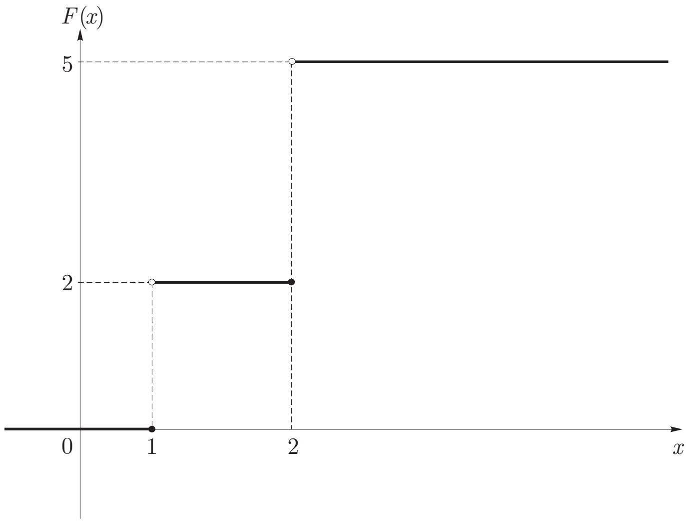


Рис. 19

Как видим, функция $F(x)$ — это константа, и только в точках 1 и 2 она совершает два «скачка», величина которых совпадает со значениями меры μ в этих точках. Для определенности считаем функцию $F(x)$ непрерывной слева, т. е. $F(1) = 0$, а не 2, и $F(2) = 2$, а не 5.

Теперь для любого отрезка $[a;\,b]$, у которого a и b не совпадают с числами 1 и 2, верна формула

$$\mu_{[a;b]} = F(b) - F(a).$$

Действительно, например,

$$\mu[-1;\,0] = F(0) - F(-1) = 0 - 0 = 0,$$

$$\mu[0;\,1,5] = F(1,5) - F(0) = 2 - 0 = 2 = \mu(1),$$

$$\mu[0;\,2,5] = F(2,5) - F(0) = 5 - 0 = 5 = \mu(1) + \mu(2),$$

$$\mu[1,5;\,2,5] = F(2,5) - F(1,5) = 5 - 2 = 3 = \mu(2).$$

Легко понять, что приведенные четыре примера охватывают все основные варианты расположения отрезка $[a;\,b]$ относительно точек 1 и 2. Остается понять, как с помощью функции $F(x)$ можно записать меру отрезков, один из концов у которых совпадает с точкой 1 или 2. В частности, надо решить, каким образом записать с помощью $F(x)$ меру самих точек 1 и 2. Но легко видеть, что

$$\mu(1) = F(1+0) - F(1-0),$$

где $F(1+0)$ обозначает предел функции $F(x)$ *справа* в точке $x = 1$. В нашем случае $F(1+0) = 2$. А $F(1-0)$ — это предел *слева*, который у нас равен нулю и совпадает с самим значением функции $F(1)$ (напомним, что функция $F(x)$ непрерывна слева). Аналогично

$$\mu(2) = F(2+0) - F(2-0) = F(2+0) - F(2) = 5 - 2 = 3.$$

Теперь перейдем к рассмотрению отрезков и запишем, например, что

$$\mu[0;\,1] = F(1+0) - F(0) = 2 - 0 = 2 = \mu(1),$$

$$\mu[0;\,2] = F(2+0) - F(0) = 5 - 0 = 5 = \mu(1) + \mu(2),$$

$$\mu[1;\,1,5] = F(1,5) - F(1-0) = F(1,5) - F(1) = 2 - 0 - 2 = \mu(1)$$

и т. д. Как видим, и здесь мера, определенная по правилу

$$\mu[a;\,b] = F(b+0) - F(a-0) \tag{1}$$

совпадает с мерой, определенной по формуле

$$\mu[a;\,b] = \sum_{x_i \in [a;b]} \mu(x_i).$$

Если учесть, что для точек a и b, не совпадающих с точками 1 и 2,

$$F(a+0) = F(a-0) = F(a),$$
$$F(b+0) = F(b-0) = F(b),$$

то формула (1) становится универсальной, годящейся для определения меры любого отрезка. (Кстати, она же верна и для абсолютно непрерывной меры, т. к. в этом случае функция $F(x)$ непрерывна в любой точке, и для всех $x \in \mathbb{R}^1$ $F(x+0) = F(x-0) = F(x)$.) Но если мы имеем дело с интервалом или полуинтервалом, то формулу (1) придется изменить (см. задание 15):

$$\mu[a;\, b) = F(b-0) - F(a-0), \tag{2}$$

$$\mu(a;\, b) = F(b-0) - F(a+0), \tag{3}$$

$$\mu(a;\, b] = F(b+0) - F(a+0). \tag{4}$$

В случае, когда точки a или b совпадают с точками 1 или 2, это изменение становится существенным.

Понятно, что похожие рассуждения можно провести и для любой другой дискретной меры. А именно, если $X = \{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots\}$, где $\mu(x_i) = m_i$, то пусть производящая функция этой меры $F(x)$ постоянна на любом полуинтервале $(x_i;\, x_{i+1}]$, а в точках x_i совершает «скачок» величины m_i. Иначе говоря,

$$F(x_i+0) - F(x_i-0) = m_i.$$

Для определенности чаще всего считают, что функция $F(x)$ непрерывна слева, т.ė.

$$F(x_i-0) = F(x_i) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

(см. рис. 20). В этом случае формулы (1)–(4) по-прежнему позволяют нам задать меру на любом отрезке, полуинтервале или интервале, а следовательно и на всей σ-алгебре борелевских множеств $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$.

На практике иногда приходится рассматривать суммы производящих функций. В частности, если $F_1(x)$ — это производящая функция абсолютно непрерывной меры, а $F_2(x)$ — дискретной меры, то их сумма $F_1(x) + F_2(x)$ соответствует мере, которая представляет собой своеобразную смесь абсолютно непрерывной и дискретной: с одной стороны, она «распределяется» по всей прямой $\mathbb{R}^1$ или хотя бы по всему отрезку

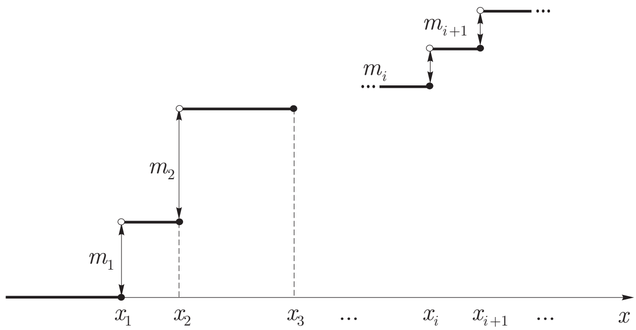


Рис. 20

$[a; b]$, но в то же время «накапливается» в отдельных точках, общее число которых не более чем счетно.

Может показаться, что комбинации абсолютно непрерывной и дискретной мер исчерпывают все многообразие мер на числовой прямой. В большинстве приложений чаще всего так и бывает. Но в принципе могут существовать и другие меры, не совпадающие с теми, о которых мы говорили выше. В качестве примера рассмотрим отрезок $[0; 1]$ и разобьем его на три равные части. Посередине, на отрезке $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$, определим функцию $F(x)$ как константу, равную $\frac{1}{2}$:

$$F(x) = \frac{1}{2}, \quad \text{если} \quad x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right].$$

Каждую из крайних частей, в свою очередь, разделим на три равные части и снова определим функцию $F(x)$ как константу в среднем из трех полученных отрезков:

$$F(x) = \frac{1}{4}, \quad \text{если} \quad x \in \left[\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right],$$
$$F(x) = \frac{3}{4}, \quad \text{если} \quad x \in \left[\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right].$$

У нас останутся четыре отрезка, каждый из которых мы вновь разделим на три равные части и т. д. (см. рис. 21). Можно показать, что, повторяя этот процесс бесконечно много раз, мы получим функцию $F(x)$, определенную на всем отрезке $[0; 1]$ и непрерывную на этом отрезке.

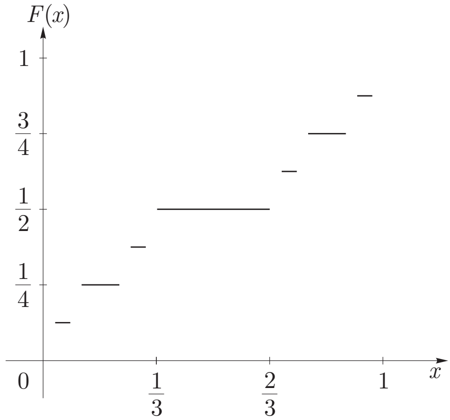


Рис. 21

Если найти суммарную длину всех отрезков, на которых $F(x)$ равна константе, то эта длина окажется равной

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \ldots + 2^n \cdot \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

(мы воспользовались формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии). Таким образом, «почти на всем отрезке $[0; 1]$» функция $F(x)$ постоянна, хотя при этом она успевает непрерывно возрасти от 0 до 1. Функцию $F(x)$ принято называть «канторовой лестницей». Вообще же функции такого типа (т. е. непрерывно возрастающие на каком-то отрезке $[a; b]$, но постоянные почти на всем этом отрезке) принято называть *сингулярными*[3]. Мера, у которой производящая функция сингулярна, тоже называется сингулярной. Можно доказать, что любая мера на числовой прямой равна сумме абсолютно непрерывной, дискретной и сингулярной мер.

Вопросы и задания.

1. К какому виду мер: абсолютно непрерывным или дискретным — Вы отнесли бы длину, площадь, объем, а также меры из заданий 4–10

[3]singularis — одиночный, отдельный, особенный (лат.)

к предыдущему разделу? (Подумайте, как можно обобщить определения абсолютно непрерывной и дискретной мер для плоскости и пространства).

2. Как Вы думаете, в каких пределах может изменяться ρ_i — «средняя» плотность отрезка $[x_i,\, x_{i+1}]$ в задаче о поиске массы отрезка $[a;\, b]$, разобранной в начале этого раздела? Возможны ли случаи, когда $\rho_i = 2\rho(x_i)$ или $\rho_i = 0,1 \cdot \rho(x_i)$? Приведите примеры.

3. При вычислении определенного интеграла необходимо, чтобы все отрезки $[x_i,\, x_{i+1}]$,участвующие в разбиении отрезка $[a;\, b]$, были бесконечно малы. Обычно это требование записывают следующим образом:

$$\lambda = \max_{i=0,1,\,...\,,n-1} |x_{i+1} - x_i| \to 0.$$

Нельзя ли в качестве λ рассмотреть среднее арифметическое длин всех имеющихся отрезков? Сумму их модулей? (Мы знаем, что $|x| + |y| \to 0$ тогда и только тогда, когда $|x| \to 0$ и $|y| \to 0$.)

4. Почему плотность абсолютно непрерывной меры обязательно должна быть функцией неотрицательной? Что изменится, если мы откажемся от этого требования?

5. Как известно, первообразная функция определяется с точностью до некоторой константы C. Пусть $F(x)$ — производящая функция меры μ. Верно ли, что $F(x) + C$ — производящая функция *той же самой* меры μ? Как избежать неоднозначности при определении $F(x)$? (Сравните $F(x)$ с функциями распределения случайных величин в теории вероятностей.)

6. Пусть $F(x)$ — производящая функция абсолютно непрерывной меры. Что тогда можно сказать про меру отрезка $[x_0,\, x_0 + \Delta x]$, если $F(x_0 + \Delta x) = F(x_0)$?

7. Почему функция $F(x)$ должна быть неубывающей?

8. Что можно сказать про меру, производящая функция которой имеет вид, показанный на рис. 22?

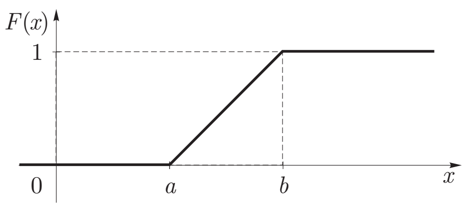


Рис. 22

9. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — плотности каких-то абсолютно непрерывных мер. Будет ли плотностью

а) их сумма $f_1(x) + f_2(x)$,

б) их произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)$?

10. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две производящие функции некоторых мер. Будут ли производящими следующие функции:

а) $F_1(x) + F_2(x)$,

б) $F_1(x) - F_2(x)$,

в) $F_1(x) \cdot F_2(x)$,

г) $-F_1(x)$?

11. Может ли производящая функция меры принимать отрицательные значения?

12. Можете ли вы привести пример множества, неизмеримого относительно какой-нибудь дискретной меры?

13. Верно ли, что сумма двух дискретных мер всегда дискретна? (Определите, будет ли соответствующее множество X счетным.)

14. Пусть производящая функция дискретной меры изображена на рис. 19. Найдите меры следующих множеств:

а) $[2;\, 3]$; б) $(-\infty;\, 5)$; в) $(-1;\, 1] \cup (2;\, 3)$.

Перечислите основные варианты расположения отрезков $[a;\, b]$, у которых один из концов совпадает с точками 1 или 2.

15. Учитывая, что

$$\begin{aligned} &\mu[a;\, b] = \mu[a;\, b) + \mu\{b\}, \\ &\mu[a;\, b] = \mu(a;\, b) + \mu\{a\} + \mu\{b\}, \\ &\mu[a;\, b] = \mu(a;\, b] + \mu\{a\}, \end{aligned}$$

выведите формулы (2)–(4) из формулы (1).

16. Как изменятся формулы (1)–(4), если учесть, что $F(x)$ непрерывна слева, т. е. $F(x - 0) = F(x)$?

Что изменится, если взять функцию $F(x)$ непрерывной справа?

17. Выведите общую формулу для «канторовой лестницы» $F(x)$ в случае, когда x принадлежит одному из 2^{n-1} «средних» отрезков, возникающих при n-ом делении. Можно ли с помощью этой формулы записать $F(0)$ или $F(1)$? Покажите, что $F(0) = 0$, а $F(1) = 1$, используя непрерывность функции $F(x)$.

5. Измеримые функции. Интеграл Лебега.

В предыдущем разделе мы рассматривали задачу о массе отрезка, имеющего переменную плотность. Мы видели, что в этом случае масса равна определенному интегралу

$$m_{[a;b]} = \int\limits_a^b \rho(x)\, dx.$$

Аналогичным образом масса плоской пластинки D и масса тела V выражаются через двойной и тройной интегралы соответственно:

$$m_D = \iint\limits_D \rho_D(x,\, y)\, dx\, dy,$$

$$m_V = \iiint\limits_V \rho_V(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz,$$

где $\rho_D(x,\, y)$ и $\rho_V(x,\, y,\, z)$ — функции плотности. Более того, аналогичным образом образом можно сосчитать массу произвольной кривой и произвольной поверхности, если известна плотность вещества в каждой точке. Для этого используют так называемые криволинейный и поверхностный интегралы. Как видим, между всеми этими интегралами имеется немало общего, да и определяются они похоже. Действительно, во всех случаях используется разбиение *области интегрирования* (отрезка, кривой, плоской фигуры, поверхности тела) на какие-то более мелкие множества, которые в пределе должны быть бесконечно малы (смысл этого требования каждый раз устанавливается по-своему). Во всех случаях выбирается одно произвольное значение *подынтегральной функции*, которое умножается на *меру* (длину, площадь, объем) элементарной области, а затем из этих произведений составляется *интегральная сумма*. Даже обозначать эти интегралы, в принципе, можно было бы единообразно:

$$\int\limits_0^1 f(x)\, dx = \int_{[0;1]} f(x)\, dx,$$

$$\iint\limits_D f(x,\, y)\, dx\, dy = \int\limits_D f(x,\, y)\, ds,$$

$$\iiint\limits_V f(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_V f(x,\, y,\, z)\, dv,$$

где ds — площадь «элементарного прямоугольника» со «сторонами» dx и dy, а dv — объем «элементарного прямоугольного параллелепипеда» со сторонами dx, dy, dz. По виду области интегрирования легко понять, какой интеграл имеется в виду: обычный (по отрезку), двойной или тройной. Возникает естественный вопрос: а нельзя ли обобщить понятие интеграла на случай произвольного множества с заданной на нем произвольной мерой? Это позволило бы нам распространить рассмотренное в предыдущем разделе понятие абсолютно непрерывных мер на случай произвольного множества. (Дискретную меру, очевидно, легко определить на любом множестве, правда, производящую функцию построить уже не удастся.)

Однако при попытке обобщить понятие интеграла мы неизбежно сталкиваемся с целым рядом трудностей. Например, непонятно, в каком порядке брать слагаемые, участвующие в интегральной сумме (на прямой этот порядок естественен: слева направо, от меньшего к большему, а двойной и тройной интегралы в конечном счете сводятся к двукратному и трехкратному, которые опять-таки берутся на прямой). Кроме того, как уже упоминалось, не удается обобщить понятие производящей функции. Но прежде всего надо решить, каким образом задавать меру на множестве произвольной природы, как описывать элементарные множества, если эти множества — не числовые.

Оказывается, меру на произвольном множестве задать очень просто, если нам известна какая-нибудь функция, действующая на этом множестве, только нам придется взять за основу не *область определения* этой функции, а *множество ее значений*. Действительно, пусть функция f действует на множестве A:

$$f\colon A \to \mathbb{R}^1.$$

Значения функции f — это числа, и любое подмножество $B \subset A$ под действием функции f переходит в *числовое множество* $f(B) \subset \mathbb{R}^1$. Между тем мы уже знаем, что на числовой прямой меру задать не так уж сложно, например, это можно сделать с помощью производящей функции. Но, выбрав меру на $\mathbb{R}^1$, мы сможем отождествить меру произвольного множества $B \subset A$ с мерой его образа $f(B)$. Правла, здесь возникает одно затруднение: поскольку функция f не обязана быть взаимно однозначной, может получиться так, что одно и то же $f(B)$ соответствует нескольким множествам из A (см. рис. 23). Поэтому мы будем рассматривать не *образы* подмножеств множества A, а *прообразы* числовых множеств относительно функции f. А именно, пусть m —

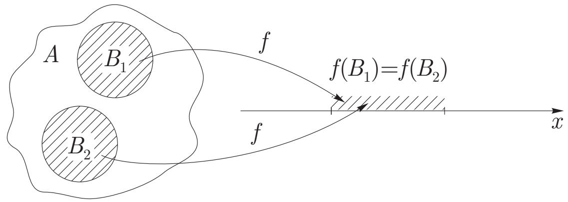


Рис. 23

это некоторая мера на $\mathbb{R}^1$. Зададим меру μ на множестве A следующим равенством:

$$m(D) = \mu(f^{-1}(D)),$$

справедливым для любого измеримого относительно меры m множества D из $\mathbb{R}^1$. Таким образом, мы сможем найти меру только тех множеств $B \subset A$, которые допускают представление вида $B = f^{-1}(D)$. (В частности, на рис. 23 измеримым будет объединение $B_1 \cup B_2$, поскольку это *полный прообраз* множества $D = f(B_1) = f(B_2)$. Меру самих множеств B_1 и B_2 мы найти, вообще говоря, не сможем.) Во всяком случае, эти измеримые множества образуют алгебру, потому что, как уже отмечалось,

$$f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2) = f^{-1}(D_1 \cup D_2),$$
$$f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2) = f^{-1}(D_1 \cap D_2),$$

т. е. объединение или пересечение двух измеримых множеств тоже измеримо, т. к. оно тоже является прообразом измеримого числового множества $D_1 \cup D_2$ и $D_1 \cap D_2$ соответственно. Более того, можно доказать, что все такие множества образуют σ-алгебру.

В теории та же ситуация чаще всего выглядит иначе. А именно, полагают, что у нас есть некоторое множество A с заданной на нем σ-алгеброй $\mathscr{F}$ и с мерой μ (заданной каким-то неизвестным нам образом *на этой σ-алгебре.*) А на числовой прямой задана мера Лебега, соответствующая обычной длине, и σ-алгебра борелевских множеств $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$. Функция f называется *измеримой относительно σ-алгебры $\mathscr{F}$*, если для любого борелевского множества $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$ его прообраз $f^{-1}(D)$ измерим: $f^{-1}(D) \in \mathscr{F}$ и мы можем найти $\mu(f^{-1}(D))$. Тогда мы можем определить на $\mathbb{R}^1$ меру m, *порожденную функцией f*, по правилу

$$m(D) = \mu(f^{-1}(D)), \qquad D \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1).$$

Чтобы пояснить все вышесказанное, обратимся к теории вероятностей. Именно здесь возникают наиболее известные множества нечисловой природы. Это *пространства элементарных событий* Ω. Каждый раз про Ω известно только то, что оно состоит из каких-то элементарных событий $\omega \in \Omega$, но указать, что именно представляют собой эти события, удается лишь в исключительных случаях, чаще всего тогда, когда Ω конечно. В большинстве задач мы не знаем, что представляют собой элементы множества Ω, но зато нам известна некоторая функция

$$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^1,$$

которую принято называть *случайной величиной*. Мы можем проследить за *значениями* этой функции и определить, какие значения возникают чаще, какие — реже. В частности, для любого отрезка $[a;\, b]$ мы можем сосчитать *вероятность*

$$P_{[a;b]} = P(f(\omega) \in [a;\, b]).$$

То же самое можно сделать для интервалов, полуинтервалов и вообще для любых борелевских множеств. Так, например, мы можем сказать, что случайная величина $f(\omega)$ принимает значения из отрезка $[0;\, 1]$ с некоторой вероятностью p, хотя мы и не знаем, каковы должны быть соответствующие элементарные события ω. Более того, мы и не желаем этого знать: мы не желаем изучать многочисленные и зачастую очень сложные причины, влияющие на поведение $f(\omega)$. *Количественные* характеристики этого поведения в виде вероятностей $P(f(\omega) \in D)$ можно получить, наблюдая за $f(\omega)$ или исходя из каких-то других соображений. Легко доказать, что найденные вероятности $P(D)$ зададут нам меру на числовой прямой, причем измеримыми будут, по крайней мере, все ее борелевские подмножества. Но тогда мы сможем задать меру $\mathscr{P}$ и на пространстве Ω:

$$\mathscr{P}(f^{-1}(D)) = P(D).$$

Здесь измеримыми будут только те множества событий, которые допускают представление в виде $f^{-1}(D)$, где D измеримо на $\mathbb{R}^1$.

Конечно, информация, которую мы сможем таким образом получить о множестве Ω, существенно зависит от вида случайной величины (т. е. функции) f. Если, например, f может принимать только два значения, допустим, 0 и 1, то фактически все Ω разобьется на две части:

$$\Omega_0 = \{\omega \in \Omega\colon f(\omega) = 0\},$$
$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega\colon f(\omega) = 1\}.$$

Мы сможем найти вероятность всего Ω (она, разумеется, равна 1), вероятности $\mathscr{P}(\Omega_0)$ и $\mathscr{P}(\Omega_1)$, а также $\mathscr{P}(\varnothing) = 0$. Никаких других измеримых множеств в Ω не будет, т. е. мы ничего не сможем сказать о «внутреннем устройстве» Ω_0 и Ω_1.

Еще хуже обстоят дела в том случае, когда случайная величина f принимает только одно значение. (Тогда ее называют константой. Фактически, случайной она уже не является.) Единственное, что мы сможем здесь сказать — это то, что вероятность $\mathscr{P}(\Omega) = 1$. Никаких других сведений об Ω у нас нет. Напротив, чем больше значений принимает $f(\omega)$, тем больше информации об Ω у нас появляется, хотя в большинстве случаев «истинная» структура Ω, «природа» его элементов все равно остается неизвестной.

Что же касается меры P на $\mathbb{R}^1$, то ее удобнее всего представлять с помощью так называемой *функции распределения* $F(x)$:

$$F(x) = F(-\infty, x) = P(f(\omega) < x), \qquad x \in \mathbb{R}^1.$$

Легко понять, что $F(x)$ — это производящая функция меры P. (В частности для нее остаются в силе формулы (1)–(4) из предыдущего раздела.) Правда, в данном случае у $F(x)$ есть содержательное истолкование: это вероятность. Как и любая производящая функция, $F(x)$ может оказаться дискретной или, например, абсолютно непрерывной. Соответствующая случайная величина тоже называется *дискретной* или *абсолютно непрерывной.*

Теперь, научившись определять меру на множестве произвольной природы, мы можем обобщить и понятие интеграла. Как и при определении меры, мы будем исходить из некоторой функции f, $f\colon A \to \mathbb{R}^1$, причем и у интегрируемой функции (обозначим ее через g) мы возьмем за основу не область определения, а область значений. Этот подход удобен тем, что область значений любой функции всегда содержится в числовой прямой $\mathbb{R}^1$, где, как уже упоминалось, легче задавать меру, а кроме того, можно упорядочить все элементы: про любые два числа a и b мы всегда можем сказать, что либо $a < b$, либо $a > b$, либо $a = b$. Недостаток же этого метода состоит в том, что функция g, от которой мы хотим взять интеграл, должна быть *измерима относительноя $\mathscr{F}$ — σ-алгебры прообразов функции f*. Это означает, что для любого борелевского множества B

$$g^{-1}(B) \in \mathscr{F}.$$

Грубо говоря, $g^{-1}(B)$ можно представить как комбинацию множеств вида $f^{-1}(B_i)$, $B_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$. *Значения функции g взаимосвязаны со зна-*

чениями функции f. Это требование зачастую существенно ограничивает число интегрируемых функций.

Итак, пусть у нас есть некоторая функция $g\colon A \to \mathbb{R}^1$, измеримая относительно σ-алгебры $\mathscr{F}$, порожденной прообразами функции f. Предположим, что функция g ограничена[4]:

$$\forall\, a \in A \qquad M_1 \leqslant g(a) \leqslant M_2.$$

Разобьем отрезок $[M_1;\, M_2]$ на несколько частей:

$$M_1 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = M_2,$$

обозначив

$$\lambda = \max_{i=0\,\ldots\,n-1} (y_{i+1} - y_i)$$

длину наибольшего из отрезков. Теперь рассмотрим следующую интегральную сумму

$$\sigma_L = \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{y_i} \cdot \mu(g^{-1}[y_i,\, y_{i+1})),$$

где $\widehat{y_i}$ — произвольная точка из множества $[y_i,\, y_{i+1})$, причем такая, что

$$\exists\, a \in A\colon g(a) = \widehat{y_i}.$$

Если же на всем полуинтервале ни одной такой точки нет, то

$$\mu(g^{-1}[y_i,\, y_{i+1})) = 0,$$

и в качестве $\widehat{y_i}$ можно взять любое число. Таким образом, на каждом полуинтервале $[y_i,\, y_{i+1})$ мы берем одно из возможных значений функции g и умножаем его не на длину полуинтервала, но на меру его прообраза. (Определяя интеграл «обычным» способом, мы должны были составить сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n} g(a_i)\mu(A_i),$$

где $A = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_N$, $a_i \in A_i$.)

---

[4]Если функция не ограничена, то для нее можно рассмотреть *несобственный* интеграл точно так же, как это делалось для интегралов вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ или $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ в курсе математического анализа.

Теперь найдем предел
$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma_L.$$
Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора $\widehat{y}_i$, то говорят, что он равен *интегралу Лебега функции g по мере μ, порожденной функцией f*. Если не уточнять, каким именно образом была задана мера μ, то говорят *об интеграле Лебега функции g по мере μ*. Обозначают этот интеграл
$$(L)\int\limits_A g\,d\mu$$
или просто
$$\int\limits_A g\,d\mu.$$
(Мы учли, что интеграл был взят по множеству A.) Впрочем, точно так же можно найти интеграл не по всему множеству A, а только по $A'\subset A$, лишь бы A' было измеримо. Соответствующая сумма σ' имеет вид
$$\sigma'=\sum_{i=0}^{n-1}\widehat{y}_i\cdot\mu(g^{-1}[y_i,\,y_{i+1})\cap A').$$
Переходя к пределу при $\lambda\to 0$, мы получим
$$(L)\int\limits_{A'} g\,d\mu.$$
Если хотят подчеркнуть, что мера μ определяется с помощью производящей функции $F(x)$ (например, если множество A — числовое), то пишут
$$(L)\int\limits_A g\,dF.$$
В противоположность интегралам Лебега «обычные» интегралы, в которых за основу берется область определения функции, называются *интегралами Римана.* Они рассматриваются только для тех функций, у которых область определения содержится в $\mathbb{R}^n$ при каком-нибудь натуральном n. Оказывается, даже в этом случае интеграл Лебега — понятие более общее, чем интеграл Римана. В частности, верна следующая теорема:

Теорема Римана. *Пусть функция $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$ интегрируема в смысле Римана*[5]. *Тогда она интегрируема и по Лебегу, причем ее интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана*:

$$(R)\int_a^b g(x)\,dx = (L)\int_a^b g(x)\,dx.$$

(Здесь мера μ совпадает с мерой Лебега на числовой прямой, т. е. мера μ — это обычная длина, поэтому вместо $d\mu$ мы пишем dx.)

Объясним, какие идеи используются при доказательстве этой теоремы. Для простоты будем предполагать, что функция $g(x)$ непрерывна. Заметим, что и область определения, и область значений $g(x)$ — это числовые множества. Мера у них одна и та же — длина. (Можно сказать, что здесь $f(x) = x$.) Функция $g(x)$, очевидно, ограничена на отрезке $[a;\, b]$, иначе она не была бы интегрируема по Риману. Пусть $M_1 \leqslant g(x) \leqslant M_2$. Разобьем отрезок $[M_1;\, M_2]$ на части:

$$M_1 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = M_2.$$

Для каждого y_j, $j = 0, \ldots, n$ найдется такое $x_i \in [a;\, b]$, что $g(x_i) = y_j$. (Может быть, таких x_i будет несколько для одного и того же y_j.) Занумеровав все x_i в порядке возрастания, получаем разбиение отрезка $[a;\, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b,$$

причем точки a и b в разбиении непременно участвуют, даже если им не соответствует никакое y_j. На каждом отрезке $[y_j;\, y_{j+1}]$ (на сей раз мы можем взять отрезок, а не полуинтервал, т. к. длина отдельной точки равна нулю) выберем число $\widehat{y}_j$: $\widehat{y}_j \in [y_j;\, y_{j+1}]$. Ему соответствует число $\widehat{x}_i$, такое что $g(\widehat{x}_i) = \widehat{y}_j$. Естественно, $\widehat{x}_i$ должно попасть в какой-то отрезок вида $[x_i;\, x_{i+1}]$. Более того, можно показать, что $\widehat{x}_i$, соответствующие разным $\widehat{y}_j$, попадут в разные отрезки. Если какому-то $\widehat{y}_j$ соответствуют два числа $\widehat{x}_i$ и $\widetilde{x}_i$ из одного и того же отрезка, то выберем только одно, любое из этих чисел. Тогда интегральной сумме для интеграла Лебега

[5] Чаще всего на функцию $g(x)$ накладывают еще одно требование:

$$(R)\int_a^b |g(x)|\,dx < +\infty,$$

но в том случае, когда a и b конечны, этот факт следует из существования интеграла Римана для самой функции $g(x)$. Вообще же говоря, данная теорема верна и при бесконечных a и b.

$$\sigma_L = \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{y}_j \cdot m(g^{-1}[y_j,\, y_{j+1}]),$$

где m — это длина на $\mathbb{R}^1$, соответствует интегральная сумма в смысле Римана

$$\sigma_R = \sum_{i=0}^{k-1} g(\widehat{x}_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{k-1} g(\widehat{x}_i) \cdot m[x_i,\, x_{i+1}].$$

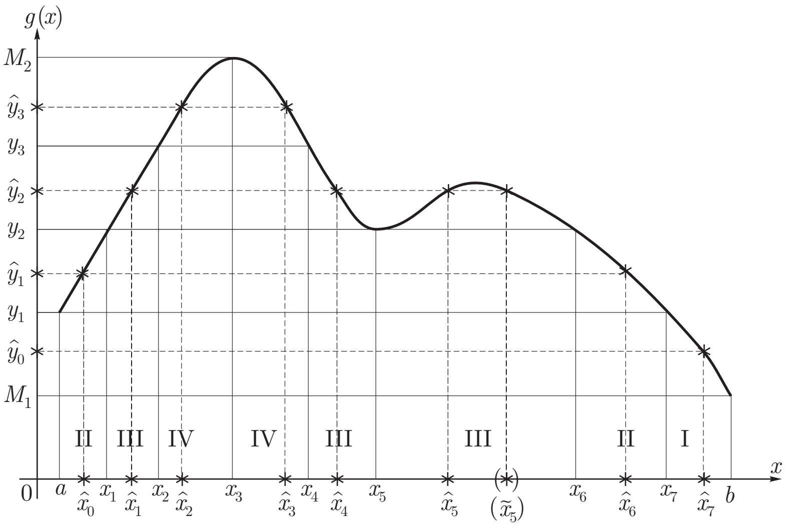


Рис. 24

Рассмотрим более подробно пример, изображенный на рис. 24. Мы видим, что четыре отрезка, фигурирующих в сумме σ_L, превращаются в восемь отрезков в сумме σ_R, причем $\widehat{x}_5$ можно выбрать двумя способами, потому что $\widehat{y}_2$ на отрезке $[x_5,\, x_6]$ соответствует двум точкам. Кроме того, мы видим, что суммы σ_L и σ_R отличаются порядком слагаемых: в σ_R мы выбираем слагаемые в порядке возрастания $\widehat{x}_i$, а в σ_L — в порядке возрастания $\widehat{y}_j$. На рисунке римскими цифрами показано, как выбирать слагаемые в σ_L. При этом зачастую два или более слагаемых из σ_R объединяются в одно.

В общем случае для всех $j = 0, \ldots, n-1$ существуют такие $i_1, i_2, \ldots, i_k$, что

$$\widehat{y}_j = g(\widehat{x}_{i_1}) = g(\widehat{x}_{i_2}) = \ldots = g(\widehat{x}_{i_k})$$

и

$$g^{-1}[y_j, y_{j+1}] = [x_{i_1}, x_{i_1+1}] \cup [x_{i_2}, x_{i_2+1}] \cup \ldots \cup [x_{i_k}, x_{i_k+1}].$$

Например, для функции, изображенной на рис. 24,

$$\widehat{y}_2 = g(\widehat{x}_1) = g(\widehat{x}_4) = g(\widehat{x}_5)$$

и

$$g^{-1}[y_2, y_3] = [x_1, x_2] \cup [x_4, x_5] \cup [x_5, x_6].$$

Соответственно,

$$m(g^{-1}[y_j, y_{j+1}]) = \sum_{s=1}^{k} m[x_{i_s}, x_{i_s+1}]$$

и

$$\widehat{y}_j \cdot m(g^{-1}[y_j, y_{j+1}]) = \sum_{s=1}^{k} g(\widehat{x}_{i_s}) \cdot m[x_{i_s}, x_{i_s+1}].$$

Итак, σ_L и σ_R состоят из одних и тех же слагаемых, записанных в разном порядке, так что их значения совпадают. Кроме того, если обозначить

$$\lambda_L = \max_{j=0\,\ldots\,n-1} |y_{j+1} - y_j|,$$
$$\lambda_R = \max_{i=0\,\ldots\,m-1} |x_{i+1} - x_i|,$$

то λ_L и λ_R стремятся к нулю одновременно (это следует из непрерывности функции $g(x)$). Когда мы будем искать предел σ_L и σ_R при $\lambda_{L,R} \to 0$, то слагаемых станет бесконечно много. Сохраняется ли и в этом случае известный закон арифметики, гласящий, что от перестановки мест слагаемых сумма не меняется? Оказывается, да, но только в том случае, когда сумма этих же слагаемых, взятых по модулю, конечна. Если

$$(R) \int_a^b |g(x)|\, dx < +\infty,$$

то это требование удовлетворяется, так что и в пределе

$$(R) \int\limits_a^b g(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sigma_R = \lim_{\lambda\to 0}\sigma_L = (L) \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

(Предел сумм σ_R существует, т.к. по условию $g(x)$ интегрируема в смысле Римана, а отсюда следует, что и предел сумм σ_L существует.)

Аналогичные результаты верны для двойных, тройных и n-кратных интегралов. Таким образом, если интеграл Римана существует, то интеграл Лебега существует и совпадает с ним. Но оказывается, интеграл Лебега может существовать и в других случаях. Пусть, например, $g(x)$ — это так называемая функция Дирихле, т.е.

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ни на одном отрезке $[a;\, b]$ эта функция не интегрируема в смысле Римана. Действительно, в интегральной сумме

$$\sigma_R = \sum_{i=0}^{n-1} g(\widehat{x}_i)(x_{i+1} - x_i)$$

мы можем выбирать в качестве $\widehat{x}_i$ исключительно рациональные числа (на любом, сколь угодно малом отрезке такое число всегда найдется), тогда $g(\widehat{x}_i) = 0$ для всех $i = 0, \ldots, n-1$ и $\sigma_R = 0$. Если же, наоборот, выбирать только иррациональные $\widehat{x}_i$, то $g(\widehat{x}_i)$ всегда равна 1 и

$$\sigma_R = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_0 = b - a.$$

Поскольку наш результат никак не зависел от λ_R, то и в пределе при $\lambda_R \to 0$ мы сможем получить как 0, так и $b - a$ (а также и многие другие числа, если выбирать $\widehat{x}_i$ как-то иначе). Таким образом, единого общего предела не существует.

Между тем, функция Дирихле интегрируема в смысле Лебега. Действительно, $g(x)$ принимает только два значения: 0 и 1. Поэтому, как бы мы ни разбивали множество $[0;\, 1]$ на отрезки $[y_i,\, y_{i+1}]$, «непустыми» будут только два отрезка: тот, который содержит 0, и тот, который содержит 1. Во всех остальных случаях

$$m(g^{-1}[y_i,\, y_{i+1}]) = 0.$$

Таким образом, σ_L содержат только два слагаемых:

$$\sigma_L = 0 \cdot m(g^{-1}\{0\}) + 1 \cdot m(g^{-1}\{1\}).$$

Но $m(g^{-1}\{0\}) = 0$, потому что множество $\mathbb{Q}$ счетно, а «длина» отдельной точки равна нулю. Поскольку

$$g^{-1}\{0\} \cup g^{-1}\{1\} = [a;\, b],$$

получаем, что

$$m(g^{-1}\{1\}) = m([a;\, b]) = b - a.$$

Итак, $\sigma_L = 1 \cdot (b - a)$ для всех λ, следовательно,

$$(L) \int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_L = b - a.$$

(Если вспомнить наши комментарии к теореме Римана, то следует отметить, что в действительности не всякую σ_R можно построить из σ_L указанным нами способом. Если предел $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_R$ существует, то это не важно, но если σ_R могут стремиться к разным *частичным* пределам, то отбрасывание части возможных σ_R становится существенным.)

Из всех приложений интеграла Лебега наиболее известно то, которое связано с вычислением математического ожидания случайной величины и ее дисперсии.

Как уже говорилось, если X — некоторая случайная величина, то она задает на множестве $\mathbb{R}^1$ меру с производящей функцией

$$F(A) = \mathscr{P}\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in A\},$$

где $A \subset \mathbb{R}^1$, Ω — множество элементарных событий, а $\mathscr{P}$ — мера (вероятность), заданная на множестве Ω. Если обозначить

$$F(x) = F(-\infty;\, x),$$

то $F(x)$ называют функцией распределения случайной величины X. Вычисляя математическое ожидание, мы находим интеграл Лебега случайной величины (т. е. функции) $X(\omega)$ на множестве Ω по мере $\mathscr{P}$:

$$M(X) = \int\limits_{\Omega} X(\omega)\, d\mathscr{P},$$

представляющий собой предел интегральных сумм вида

$$\sigma_L = \sum_{i=0}^{n-1} X(\omega_i) \cdot \mathscr{P}(\Omega_i),$$

где $\omega_i \in \Omega_i$. Если ограничиться только теми Ω_i, для которых $X(\Omega_i) = [x_i,\, x_{i+1})$, то

$$\sigma_L = \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{x}_i \cdot \mathscr{P}(X^{-1}[x_i,\, x_{i+1})) = \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{x}_i \cdot F[x_i,\, x_{i+1}),$$

где $\widehat{x}_i \in [x_i,\, x_{i+1})$. Иначе говоря,

$$M(X) = (L) \int\limits_{\mathbb{R}^1} x\, dF.$$

(Фактически, мы просто сделали замену переменной, положив $x{=}X(\omega)$.) Таким образом, математическое ожидание можно понимать как интеграл Лебега функции $g(x) = x$ на прямой $\mathbb{R}^1$, правда, интеграл этот взят по мере, которая не совпадает с обычной длиной, но задается с помощью функции распределения случайной величины $X(\omega)$. Как видим, подынтегральная функция «взаимосвязана» с функцией, задающей меру: в исходном интеграле обе они совпадают с $X(\omega)$. В частности, если $F(x)$ абсолютно непрерывна и плотность ее равна $f(x)$, то приходим к известной формуле

$$M(X) = (L) \int\limits_{\mathbb{R}^1} x\, dF = (L) \int\limits_{\mathbb{R}^1} x f(x)\, dx = (R) \int\limits_{\mathbb{R}^1} x f(x)\, dx,$$

т. е.

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx.$$

Если же $F(x)$, наоборот, дискретна, то рассуждая точно так же, как в примере с функцией Дирихле, находим, что

$$M(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot F\{x_i\} = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot P(X = x_i),$$

где N — количество значений, которые может принять наша случайная величина. (В частности, возможно, что $N = +\infty$).

Аналогичным образом можно найти формулы для $M(X^2)$, необходимые при вычислении дисперсии:

$$M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx$$

для абсолютно непрерывной и

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 P(X = x_i)$$

для дискретной случайной величины. В действительности же это частные случаи общей формулы

$$M(X^2) = \int\limits_{\Omega} X^2(\omega)\, d\mathscr{P} = (L) \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^2\, dF.$$

Вопросы и задания.

1. Заполните следующую таблицу:

1.Вид интеграла	2.Вид и свойства множеств, участвующих в разбиении	3.Вид интегральной суммы
Определенный Двойной Тройной		

4.Суммы Дарбу	5.Условие предельного перехода	6.Классы интегрируемых функций

2. Изменится ли определение интеграла Лебега, если вместо полуинтервалов $[x_i,\, x_{i+1})$ рассматривать множества $(x_i,\, x_{i+1}]$, $[x_i,\, x_{i+1}]$ или $(x_i,\, x_{i+1})$?

3. Найти интеграл Лебега следующих функций:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0;\, 1], \\ 2, & \text{если } x \in [1;\, 2], \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Z}; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Z}, \\ x, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{3};\, \frac{2}{3}\right], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Во всех случаях интеграл берется по всей числовой прямой $\mathbb{R}^1$ и по мере, совпадающей с обычной длиной.

4. Пусть в интеграле Лебега

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x)\, d\mu$$

мера μ задана с помощью некоторой функции f:

$$\mu(A) = m(f^{-1}(A)), \qquad A \subset \mathbb{R}^1,$$

где m — мера Лебега на $\mathbb{R}^1$. Можно ли вычислить интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)\, d\nu,$$

где мера ν задана с помощью функции $g(x)$?

5. Почему рассуждение, с помощью которого мы показывали справедливость теоремы Римана, годится только для непрерывной функции $g(x)$?

6. В каком случае интегральные суммы σ_R и σ_L содержат одинаковое количество слагаемых?

7. Выберите $\widehat{x}_i$ так, чтобы сумма σ_R, составленная для функции Дирихле на отрезке $[a,\, b]$ стремилась к $\dfrac{a-b}{2}$. Какие вообще значения может принимать эта сумма?

8. Пусть случайная величина $X(\omega)$ состоит из двух слагаемых:

$$X = X_a + X_D,$$

где X_a — абсолютно непрерывная, а X_D — дискретная случайные величины. Чему в этом случае равно математическое ожидание $M(X)$?

Литература

[1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М: «Наука», 1989.

[2] А. В. Погорелов. Геометрия. Учебник для 7–11 классов средней школы. М: «Просвещение», 1993.