В.В.Шуликовская

Исследование операций. Динамическое программирование

Методическое пособие
бакалаврам направления «Бизнес-информатика»

Ижевск
2015

ББК 22.183.47 р 30
УДК 519.8(075.5)+658.012.122(075.5)

Рецензент проректор по УР ИжГСХА професор П.Б.Акмаров.

Пособие адресовано студентам направления «Бизнес-информатика». В пособии объясняется, в чем состоит суть метода динамического программирования. Кроме того, рассмотрены наиболее известные экономические задачи, в которых оптимальное значение целевой функции можно найти с помощью этого метода.

Введение

Предположим, что нам надо решить задачу оптимизации:

$$\begin{cases} f(x) \to extr, \\ x \in D, \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

где D – некоторое подмножество пространства R^n. Если целевая функция *f(x)* линейна, а область D представляет собой n-мерный многогранник, то мы получаем задачу линейного программирования, которую можно решить, например, с помощью симплекс-метода. Если *f(x)* – дифференцируемая функция n переменных, а область D задана аналитически (как решение системы неравенств $g_i(x) \le 0, \quad i = 1,...,m$, где все функции $g_i(x)$ дифференцируемы), то мы можем воспользоваться методом Лагранжа. Однако при построении многих математических моделей возникают функции, не обладающие ни одним из указанных выше свойств. Существуют ли методы, позволяющие решить задачу (I) и в этом случае? В данном пособии мы познакомимся еще с одним методом решения оптимизационных задач, который годится для функций, допускающих *поэтапную* оптимизацию, когда оптимальные значения переменных находятся не одновременно, а как бы по очереди. Такие функции наиболее естественны в *динамических* моделях, потому что в них переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ зачастую можно понимать как параметры, характеризующие состояние системы в различные моменты времени, а целевая функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ позволяет оценить деятельность системы за некоторый период. Именно поэтому метод поэтапной оптимизации в задаче (I) обычно называется *методом динамического программирования*. Чаще всего им пользуются в тех случаях, когда функция $f(x)$ определена на каком-то конечном множестве D, например, задана таблично.

1. Методы прямой и обратной прогонки

Пример 1.1. Поставим следующую задачу условной оптимизации:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3. \end{cases}$$

Конечно, эту задачу можно решить методом Лагранжа. Мы получим систему уравнений, с помощью которой найдем оптимальное значение $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. Однако заметим, что целевая функция в этой задаче обладает одним особым свойством: она состоит из трех различных функций, каждая из которых зависит только от одной из имеющихся переменных: $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$, где $f_i(x_i) = x_i^2, i = 1,2,3$. Поэтому мы постараемся сначала оценить одно только последнее слагаемое, зависящее от x_3, затем – второе и третье слагаемые вместе взятые, зависящие от x_2 и x_3, и наконец, всю функцию $f(x)$ в зависимости от всех трех переменных. Поскольку мы будем двигаться от последней переменной к первой, то есть от конца к началу, данный метод решения принято называть *методом обратной прогонки*. Заметим еще, что на каждом этапе мы будем фиксировать не значения переменных по отдельности, а значение некоторой их комбинации. Сначала мы рассмотрим величину M_3, связанную только с переменной x_3, затем M_2, зависящую от x_2 и x_3, потом M_1, зависящую от всех трех переменных. Поскольку по условию задачи нам известна сумма $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, в качестве M_i удобнее всего выбирать суммы имеющихся переменных.

Итак, пусть $M_3 = x_3$, $M_3 \in [0; 1]$. Мы хотим найти минимум функции $f_3(x_3)$ *при каждом фиксированном* M_3. Поскольку

$$f_3(x_3) = x_3^2 = M_3^2,$$

при фиксированном $M_3 \in [0; 1]$

$$F_3(M_3) = \min_{x_3 = M_3} f(x_3) = M_3^2.$$

Теперь зафиксируем сумму двух последних переменных:

$$x_2 + x_3 = M_2, M_2 \in [0; 1]$$

и будем искать

$$F_2(M_2) = \min_{\substack{x_2 + x_3 = M_2 \\ x_2, x_3 \ge 0}} \left(f_2(x_2) + f_3(x_3)\right).$$

Понятно, что при каждом x_2 мы знаем $M_3 = x_3 = M_2 - x_2$. Заметим еще, что в силу неотрицательности x_2 и x_3 переменная $x_2 \in [0; M_2]$. Таким образом,

$$F_2(M_2) = \min_{x_2 \in [0; M_2]} \left(f_2(x_2) + f_3(M_2 - x_2)\right).$$

Заменим второе слагаемое на его минимальное значение, найденное на предыдущем этапе:

$$F_2(M_2) = \min_{x_2 \in [0; M_2]} \left(f_2(x_2) + F_3(M_2 - x_2)\right) = \min_{x_2 \in [0; M_2]} \left(x_2^2 + (M_2 - x_2)^2\right).$$

Мы приходим к задаче о поиске минимума функции одной переменной на отрезке. Найдем критические точки этой функции, считая M_2 константой:

$$\left(x_2^2 + (M_2 - x_2)^2\right)' = 0,$$

$$2x_2 - 2(M_2 - x_2) = 0,$$

$$4x_2 = 2M_2,$$

$$x_2 = \frac{M_2}{2} \in [0; M_2].$$

Сравним значения функции в критической точке и на концах отрезка. При $x_2 = \dfrac{M_2}{2}$ получаем

$$\left(\frac{M_2}{2}\right)^2 + \left(M_2 - \frac{M_2}{2}\right)^2 = \frac{M_2^2}{2}.$$

Если x_2=0, то

$$0^2 + (M_2 - 0)^2 = M_2^2.$$

Аналогично при x_2=M_2

$$M_2^2 + (M_2 - M_2)^2 = M_2^2.$$

Таким образом,

$$F_2(M_2) = \frac{M_2^2}{2} \text{ при } x_2 = \frac{M_2}{2}.$$

Теперь рассмотрим сумму всех трех переменных $M_1 = x_1 + x_2 + x_3$. По условию задачи M_1=1. Нам надо найти

$$F_1(M_1) = F_1(1) = \min_{\substack{x_1+x_2+x_3=1 \\ x_i \ge 0}} \left(f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)\right).$$

Мы уже знаем, чему равно минимальное значение двух последних слагаемых вместе взятых, если известна сумма $x_2 + x_3 = M_2$. Поэтому

$$F_1(M_1) = \min_{\substack{x_1+M_2=1 \\ x_1 \ge 0,\, M_2 \ge 0}} \left(f_1(x_1) + F_2(M_2)\right) = \min_{x_1 \in [0;1]} \left(f_1(x_1) + F_2(1 - x_1)\right) = \min_{x_1 \in [0;1]} \left(x_1^2 + \frac{(1-x_1)^2}{2}\right).$$

Мы опять получили задачу о поиске минимума функции одной переменной на отрезке. Решаем ее:

$$\left(x_1^2 + \frac{(1-x_1)^2}{2}\right)' = 2x_1 - (1 - x_1) = 3x_1 - 1 = 0.$$

Критическая точка $x_1 = \frac{1}{3} \in [0;1]$.

При $x_1 = \frac{1}{3}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2}{2} = \frac{1}{3}.$$

При $x_1 = 0$

$$0^2 + \frac{(1-0)^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

При $x_1 = 1$

$$1^2 + \frac{(1-1)^2}{2} = 1.$$

Таким образом,

$$F_1(M_1) = \frac{1}{3} \text{ при } x_1 = \frac{1}{3}.$$

Это и есть искомый минимум нашей функции. Поскольку $x_1 = \frac{1}{3}$, $M_2 = 1 - x_1 = \frac{2}{3}$. На втором этапе мы выяснили, что $x_2 = \frac{M_2}{2}$, поэтому $x_2 = \frac{1}{3}$.

Теперь $M_3 = M_2 - x_2 = \frac{1}{3}$ и $x_3 = M_3 = \frac{1}{3}$. Итак, $f(x) = \frac{1}{3}$ при $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$. Заметим, что вместо задачи о минимуме *функции трех переменных* мы рассмотрели *три задачи* о минимуме *функции одной переменной* (первая из которых была тривиальна). Фактически мы использовали равенство

$$\min_{\substack{x_1+x_2+x_3=1,\\ x_i\ge 0}} \left(f_1(x_1)+f_2(x_2)+f_3(x_3)\right) = \min_{x_1\in[0;1]}\left(f_1(x_1)+\min_{x_2\in[0;1-x_1]}\left(f_2(x_2)+\min_{x_3\in[0;1-x_1-x_2]} f(x_3)\right)\right). \quad (1.1)$$

Это утверждение, справедливое для суммы любого количества слагаемых, известно как *принцип оптимальности Беллмана* [1] или *основное рекуррентное соотношение динамического программирования*.

Отметим еще, что в нашем примере целевая функция $f(x)$ представляла собой *сумму* трех функций, зависящих от одной переменной каждая. Такие функции называются *аддитивными*. Оценки M_1, M_2 и M_3 выбирались таким образом, что впоследствии мы смогли однозначно восстановить по ним переменные x_1, x_2 и x_3.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1.2.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3. \end{cases}$$

На сей раз мы будем оценивать слагаемые, начиная с первого, то есть двигаться от начала к концу, пользуясь так называемым *методом прямой прогонки*.

Обозначим $M_1 = x_1$ и найдем

$$F_1(M_1) = \min_{x_1=M_1}\left(x_1^2\right) = M_1^2.$$

Заметим, что в силу ограничений, наложенных на переменные x_1, x_2 и x_3, величина $M_1 \in [0; 1]$.

Пусть теперь $M_2 = x_1 + x_2$, а

$$F_2(M_2) = \min_{\substack{x_1+x_2=M_2\\ (x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_1+x_2\le 1)}} \left(x_1^2 + x_2^2\right).$$

Учтем, что при фиксированном M_2 переменная $x_1 = M_2 - x_2 = M_1$, а наименьшее значение первого слагаемого при известном M_1 мы уже нашли. Кроме того, заметим, что $x_2 \in [0; M_2]$. Таким образом,

$$F_2(M_2) = \min_{\substack{x_1+x_2=M_2\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_1+x_2\le 1}} \left((M_2 - x_2)^2 + x_2^2\right) = \min_{x_2\in[0;M_2]}\left((M_2 - x_2)^2 + x_2^2\right), \text{ где } M_2 \in [0; 1].$$

Найдем критические точки функции $(M_2 - x_2)^2 + x_2^2$:

[1] Беллман Р. – американский математик, который внес основной вклад в разработку методов динамического программирования.

$$-2(M_2-x_2)+2x_2=0,$$

$$x_2=\frac{1}{2}M_2.$$

Сравним значения функции в критических точках и на концах отрезка:

при x_2=0 получаем $(M_2-0)^2+0^2=M_2^2$,

при x_2=$\frac{M_2}{2}$ получаем $\left(M_2-\frac{M_2}{2}\right)^2+\left(\frac{M_2}{2}\right)^2=\frac{M_2^2}{2}$,

при x_2=M_2 получаем $(M_2-M_2)^2+M_2^2=M_2^2$.

Таким образом, $F_2(M_2)=\frac{M_2^2}{2}$ при x_2=$\frac{M_2}{2}$.

Теперь рассмотрим $M_3=x_1+x_2+x_3=1$ и найдем

$$F_3(M_3)=F_3(1)=\min_{\substack{x_1+x_2+x_3=1\\ x_i\geq 0}}\left(x_1^2+x_2^2-x_3^2\right).$$

Заметим, что $M_2=x_1+x_2=1-x_3$, и наименьшее значение первых двух слагаемых, равное $\frac{M_2^2}{2}$, можно записать как $\frac{(1-x_3)^2}{2}$. Поэтому

$$F_3(1)=\min_{\substack{x_1+x_2+x_3=1\\ x_i\geq 0}}\left(\frac{(1-x_3)^2}{2}-x_3^2\right)=\min_{x_3\in[0;\,1]}\left(\frac{(1-x_3)^2}{2}-x_3^2\right).$$

Находим критические точки:

$$-(1-x_3)-2x_3=0,$$

$$x_3=-1$$

и единственная критическая точка лежит вне отрезка $[0;1]$. Сравним значения функции на концах отрезка:

при x_3=0 $\quad\frac{(1-0)^2}{2}-0^2=\frac{1}{2}$,

при x_3=1 $\quad\frac{(1-1)^2}{2}-1^2=-1$.

Итак, $F_3(1)=-1$ при x_3=1. Тогда $M_2=1-x_3=0$, откуда $x_2=\frac{M_2}{2}=0$ и $x_1=M_2-x_2=0$. Минимальное значение -1 достигается в точке (0; 0; 1).

Аналогичный результат можно было получить и методом обратной прогонки. Запишем вкратце необходимые рассуждения.

При $M_3=x_3$

$$F_3(M_3)=\min_{x_3=M_3}\left(-x_3^2\right)=-M_3^2,\quad M_3\in[0;1].$$

При $M_2=x_2+x_3,\quad M_2\in[0;1]$

$$F_2(M_2)=\min_{\substack{x_2+x_3=M_2\\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0}}\left(x_2^2-x_3^2\right)=\min_{x_2\in[0;\,M_2]}\left(x_2^2-(M_2-x_2)^2\right).$$

Находя критическую точку, получаем уравнение $2M_2 = 0$. Если $M_2 = 0$, то отрезок $[0; M_2]$ превращается в одну точку $x_2 = 0$, где $F_2(M_2) = F_2(0) = 0$. В противоположном случае критических точек нет и, сравнивая значения функции на концах отрезка $[0; M_2]$, видим, что $F_2(M_2) = -M_2^2$ при $x_2 = 0$. Эта формула справедлива и для $M_2 = 0$.

Теперь $M_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1$ и

$$F_1(M_1) = \min_{\substack{x_1+x_2+x_3=1 \\ x_i \ge 0}} \left(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2\right) = \min_{\substack{x_1+M_2=1 \\ x_1 \ge 0,\, M_2 \ge 0}} \left(x_1^2 - M_2^2\right) = \min_{x_1 \in [0;1]} \left(x_1^2 - (1-x_1)^2\right).$$

Легко убедиться, что $F_1(M_1) = -1$ при $x_1 = 0$. Отсюда $M_2 = 1 - x_1 = 1$, а поскольку $x_2 = 0$, видим, что $x_3 = M_2 - x_2 = 1$. И значение функции, и координаты точки совпадают с найденными ранее.

Иногда при оценке $F_i(M_i)$ надо учитывать, в каких пределах меняется параметр M_i.

Пример 1.3.

$$\begin{cases} 4x_1^3 + x_2^3 + 3x_3 \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3. \end{cases}$$

Воспользуемся методом обратной прогонки.

1) $x_3 = M_3$ и

$$F_3(M_3) = \min_{x_3 = M_3} (3x_3) = 3M_3,$$

где $M_3 \in [0;1]$.

2) $F_2(M_2) = \min\limits_{\substack{x_2+x_3=M_2 \\ x_2 \ge 0,\, x_3 \ge 0,\, x_2+x_3 \le 1}} \left(x_2^3 + 3x_3\right) = \min\limits_{x_2 \in [0; M_2]} \left(x_3^2 + 3(M_2 - x_2)\right)$, где $M_2 \in [0;1]$.

Критические точки функции $x_3^2 + 3(M_2 - x_2)$ – это точки $x_2 = \pm 1$, причем только одна из них может попасть в отрезок $[0; M_2]$, да и то в том случае, когда $M_2 = 1$. В этом случае она совпадает с правым концом отрезка. Поэтому достаточно сравнить значения функции при $x_2 = 0$ и $x_2 = M_2$.

При $x_2 = 0$ мы получим $3M_2$, а при $x_2 = M_2$ мы получим M_2^3. Которое из этих значений меньше? Решим неравенство

$3M_2 < M_2^3$,

$|M_2| > \sqrt{3}$, так как $M_2 \ge 0$.

Но в нашей задаче $M_2 \in [0;1]$, так что всегда верно обратное неравенство и $F_2(M_2) = M_2^3$ при $x_2 = M_2$.

3) $F_1(M_1) = F_1(1) = \min\limits_{\substack{x_1+x_2+x_3=1 \\ x_i \ge 0}} \left(4x_1^3 + x_2^3 + 3x_3\right) = \min\limits_{\substack{x_1+M_2=1 \\ x_1 \ge 0,\, M_2 \ge 0}} \left(4x_1^3 + M_2^3\right) = \min\limits_{x_1 \in [0;1]} \left(4x_1^3 + (1-x_1)^3\right).$

Исследовав функцию $4x_1^3 + (1-x_1)^3$ на отрезке $[0;1]$, видим, что $F_1(1) = \dfrac{4}{9}$ при

$x_1 = \dfrac{1}{3}$. Соответственно, $M_2 = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} = x_2$ и $x_3 = 0$. Искомое значение $\dfrac{4}{9}$ достигается в точке $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; 0\right)$.

Действуя методом прямой или обратной прогонки, можно искать и наибольшее значение функции.

Пример 1.4.

$$\begin{cases} 2x_1^3 + x_2^3 + 3x_3 \to \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3. \end{cases}$$

Воспользуемся методом прямой прогонки.

1) $x_1 = M_1$, $F_1(M_1) = 2M_1^3$, $M_1 \in [0;1]$.

2) На сей раз в качестве M_2 выгоднее взять сумму $x_1 + 2x_2$.

$$F_2(M_2) = \max_{\substack{x_1 + 2x_2 = M_2 \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0,\, x_1 + 2x_2 \le 1}} \left(2x_1^3 + x_2^3\right) = \max_{\substack{M_1 + 2x_2 = M_2 \\ M_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0,\, M_1 + 2x_2 \le 1}} \left(2M_1^3 + x_2^3\right) = \max_{x_2 \in \left[0; \frac{M_2}{2}\right]} \left(2(M_2 - 2x_2)^3 + x_2^3\right),$$

где $M_2 \in [0;1]$.

Ищем критическую точку:

$$-12(M_2 - 2x_2)^2 + 3x_2^2 = 0,$$

$$4(M_2 - 2x_2)^2 = x_2^2.$$

Учитывая, что $M_2 - 2x_2 = x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$, получаем

$$2(M_2 - 2x_2) = x_2,$$

$$x_2 = \frac{2}{5} M_2.$$

Находим значения функции в точках $x_2 = 0,\quad x_2 = \dfrac{2}{5} M_2$ и $x_2 = \dfrac{M_2}{2}$. Они равны $2\grave{I}_2^3$, $\dfrac{2}{25}\grave{I}_2^3$ и $\dfrac{1}{8} M_2^3$ соответственно. Таким образом, $F_2(M_2) = 2M_2^3$ при $x_2 = 0$.

3) Теперь $M_3 = x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ и

$$F_3(1) = \max_{\substack{x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \ge 0}} \left(2x_1^3 + x_2^3 + 3x_3\right) = \max_{\substack{M_2 + x_3 = 1 \\ M_2 \ge 0,\, x_3 \ge 0}} \left(2M_2^3 + 3x_3\right) = \max_{x_3 \in [0;1]} \left(2(1 - x_3)^3 + 3x_3\right) = 3$$

при $x_3 = 1$.

Отсюда $M_2 = 1 - x_3 = 0$, то есть $x_1 = x_2 = 0$. Итак, максимальное значение целевой функции достигается в точке (0; 0; 1) и равно 3.

Теперь рассмотрим пример, в котором переменные связаны условием типа неравенства.

Пример 1.5.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min, \\ \dfrac{1}{2} \le x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3. \end{cases}$$

Если действовать методом обратной прогонки, то первые два этапа решения этой задачи выглядят так же, как в примере 1.1. Напомним, что $F_3(M_3) = M_3^2$ при $x_3 = M_3$, а $F_2(M_2) = \dfrac{M_2^2}{2}$ при $x_2 = \dfrac{M_2}{2}$. Теперь

$$M_1 = x_1 + x_2 + x_3 \text{ и } M_1 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

Соответственно, $x_1 \in [0; M_1]$, поэтому

$$F_1(M_1) = \min_{x_1 \in [0; M_1]} \left(x_1^2 + \frac{(M_1 - x_1)^2}{2} \right) = \frac{M_1^2}{3} \text{ при } x_1 = \frac{M_1}{3}.$$

Таким образом, *если зафиксировать сумму* $x_1 + x_2 + x_3 = M_1$, то искомый минимум равен $\dfrac{M_1^2}{3}$. Остается найти

$$\min_{M_1 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]} \frac{M_1^2}{3}.$$

Очевидно, он равен $\dfrac{1}{12}$ при $M_1 = \dfrac{1}{2}$. Соответствующие значения переменных $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{6}$.

До сих пор мы рассматривали исключительно *аддитивные* функции, да и ограничения, наложенные на переменные, носили *аддитивный* характер, то есть имели вид

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b\ (\le b). \qquad (1.2)$$

В следующем примере целевая функция *мультипликативная*, то есть

$$f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n).$$

Пример 1.6.

$$\begin{cases} x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_3 \to \max, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 5, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3. \end{cases}$$

Обозначим $x_1 = M_1$, тогда

$$F_1(M_1) = \max_{x_1 = M_1} (x_1^2) = M_1^2,$$

где $M_1 \in [0; 5]$.

Теперь $x_1 + x_2 = M_2$, где $M_2 \in [0;\ 5]$, и

$$F_2(M_2) = \max_{x_2 \in [0;\, M_2]} (M_2 - x_2)^2 \cdot x_2^3 .$$

У функции $(M_2 - x_2)^2 \cdot x_2^3$ есть три критические точки: $x_2 = 0$, $x_2 = \frac{3}{5} M_2$ и $x_2 = M_2$. Все они лежат на отрезке $[0;\, M_2]$. Сравнивая значения функции в этих точках, видим, что $F_2(M_2) = \frac{108}{3125} M_2^5$ при $x_2 = \frac{3}{5} M_2$.

Наконец, $M_3 = x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$ и

$$F_3(M_3) = F_3(5) = \max_{\substack{M_2 + 5\tilde{o}_3 = 5 \\ M_2 \ge 0,\ \tilde{o}_3 \ge 0}} \left(\frac{108}{3125} M_2^5 \cdot x_3 \right) = \max_{\tilde{o}_3 \in [0;\,1]} \frac{108}{3125} (5 - 5\tilde{o}_3)^5 \cdot x_3 =$$

$$= \max_{\tilde{o}_3 \in [0;\,1]} 108 (1 - \tilde{o}_3)^5 \cdot x_3 = \frac{3125}{432}$$

при $x_3 = \frac{1}{6}$. Соответственно, $M_2 = 5 - 5x_3 = \frac{25}{6}$ и $x_2 = \frac{5}{2}$. Учитывая, что $x_1 = M_2 - x_2$, находим $x_1 = \frac{5}{3}$. Итак, искомое значение 9375 достигается в точке $\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{2}; \frac{1}{6} \right)$.

Теперь рассмотрим задачу, в которой условия, наложенные на переменные, не аддитивны.

Пример 1.7.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \to \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1, \\ x_i \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right],\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1) Пусть $x_1 = M_1$, где $M_1 \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right]$. Тогда $F_1(M_1) = M_1$.

2) Пусть теперь $x_1 \cdot x_2 = M_2$. Учитывая, что $x_3 \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right]$, видим, что $M_2 \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right]$. Нам надо найти пределы, в которых меняется x_2. Поскольку $x_2 = \frac{M_2}{x_1}$, а $x_1 \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right]$, необходимо, чтобы $x_2 \in \left[\frac{M_2}{2}; 2M_2 \right]$. В то же время $x_2 \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right]$. Рассмотрим два случая.

а) $M_2 \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. Тогда $x_2 \in \left[\frac{1}{2};2M_2\right]$. Поскольку

$$F_2(M_2) = \max_{x_1 \cdot x_2 = M_2}(x_1 + x_2) = \max_{M_1 \cdot x_2 = M_2}(M_1 + x_2) = \max_{x_2 \in \left[\frac{1}{2};2M_2\right]}\left(\frac{M_2}{x_2} + x_2\right),$$

получаем критическую точку $x_2 = \sqrt{M_2}$. Заметим, что из условия

$$\frac{1}{2} \le M_2 \le 1$$

следует

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} \le \sqrt{M_2} \le 1 \le 2M_2,$$

то есть критическая точка принадлежит нашему отрезку. Вычисляя значения функции при $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \sqrt{M_2}$ и $x_2 = 2M_2$, видим, что

$$F_2(M_2) = \max\left\{2M_2 + \frac{1}{2}; 2\sqrt{M_2}; \frac{1}{2} + 2M_2\right\}.$$

Однако

$$2M_2 + \frac{1}{2} - 2\sqrt{M_2} = \left(2\sqrt{M_2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \ge 0,$$

поэтому

$$F_2(M_2) = 2M_2 + \frac{1}{2} \text{ при } x_2 = \frac{1}{2} \text{ или } x_2 = 2M_2.$$

б) $M_2 \in [1;2]$. Тогда $x_2 \in \left[\frac{M_2}{2};2\right]$ и

$$F_2(M_2) = \max_{x_2 \in \left[\frac{M_2}{2};2\right]}\left(\frac{M_2}{x_2} + x_2\right).$$

Критическая точка $x_2 = \sqrt{M_2}$ принадлежит исследуемому отрезку:

$$1 \le M_2 \le 2,$$

$$\frac{M_2}{2} \le 1 \le \sqrt{M_2} \le \sqrt{2} \le 2.$$

Сравниваем значения функции в точках $x_2 = \frac{M_2}{2}$, $x_2 = \sqrt{M_2}$ и $x_2 = 2$:

$$F_2(M_2) = \max\left\{2 + \frac{M_2}{2}; 2\sqrt{M_2}; \frac{M_2}{2} + 2\right\}.$$

Как и в предыдущем случае,

$$\frac{M_2}{2} + 2 - 2\sqrt{M_2} = \left(\sqrt{\frac{M_2}{2}} - \sqrt{2}\right)^2 \ge 0,$$

так что $F_2(M_2)=\dfrac{M_2}{2}+2$ при $x_2=\dfrac{M_2}{2}$ или $x_2=2$.

3) Пусть $M_3=x_1\cdot x_2\cdot x_3=1$, тогда

$$F_3(M_3)=F_3(1)=\max_{\substack{x_1\cdot x_2\cdot x_3=1\\ x_i\in\left[\frac{1}{2};2\right]}}(x_1+x_2+x_3)=\max_{\substack{M_2\cdot x_3=1\\ M_2,\ x_3\in\left[\frac{1}{2};2\right]}}(F_2(M_2)+x_3)=\max_{x_3\in\left[\frac{1}{2};2\right]}\left(F_2\left(\frac{1}{x_3}\right)+x_3\right).$$

а) Если $x_3\le 1$, то $\dfrac{1}{x_3}\ge 1$ и $F_2\left(\dfrac{1}{x_3}\right)=\dfrac{1}{2x_3}+2$. Таким образом,

$$F_3(M_3)=\max_{x_3\in\left[\frac{1}{2};1\right]}\left(\frac{1}{2x_3}+2+x_3\right).$$

Производная этой функции обращается в нуль при $x_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Сравнивая значения функции при $x_3=\dfrac{1}{2}$, $x_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_3=1$, видим, что

$$F_3(M_3)=3{,}5 \text{ при } x_3=\frac{1}{2} \text{ или } x_3=1.$$

Если $x_3=\dfrac{1}{2}$, то $M_2=2$ и $x_2=\dfrac{M_2}{2}=1$ или $x_2=2$. Получаем две точки $\left(2;1;\dfrac{1}{2}\right)$ и $\left(1;2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Если $x_3=1$, то $M_2=1$ и $x_2=\dfrac{M_2}{2}=\dfrac{1}{2}$ или $x_2=2$. Получаем еще две точки: $\left(2;\dfrac{1}{2};1\right)$ и $\left(\dfrac{1}{2};2;1\right)$.

б) Если $x_3\ge 1$, то $\dfrac{1}{x_3}\le 1$ и $F_2\left(\dfrac{1}{x_3}\right)=\dfrac{2}{x_3}+\dfrac{1}{2}$. Отсюда

$$F_3(M_3)=\max_{x_3\in[1;2]}\left(\frac{2}{x_3}+\frac{1}{2}+x_3\right).$$

Производная обращается в нуль при $x_3=\sqrt{2}$. Находим

$$F_3(M_3)=\max\left\{3{,}5;\,2\sqrt{2}+\frac{1}{2};\,3{,}5\right\}=3{,}5$$

при $x_3=1$ или $x_3=2$. Соответственно, $M_2=1$ или $\dfrac{1}{2}$. Учитывая, что на сей раз $x_2=\dfrac{1}{2}$ или $x_2=2M_2$, получаем следующие точки:

$\left(2;\frac{1}{2};1\right)$, $\left(\frac{1}{2};2;1\right)$, $\left(1;\frac{1}{2};2\right)$ и $\left(\frac{1}{2};1;2\right)$.

Таким образом, наибольшее значение целевой функции равно 3,5. Оно достигается в шести точках: $\left(2;1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(1;2;\frac{1}{2}\right)$, $\left(2;\frac{1}{2};1\right)$, $\left(\frac{1}{2};2;1\right)$, $\left(1;\frac{1}{2};2\right)$ и $\left(\frac{1}{2};1;2\right)$.

Как видим, даже при решении такой, достаточно простой задачи, нам пришлось рассматривать несколько разных случаев, да и поиск пределов, в которых могут изменяться на каждом этапе наши переменные, оказался занятием нетривиальным. Именно поэтому чаще всего методы динамического программирования применяются к задачам, в которых переменные связаны условием типа (1.2) и, возможно, требованием неотрицательности: $x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n$. Класс целевых функций тоже достаточно узок. В большинстве случаев это аддитивные либо мультипликативные функции. Поэтому методы динамического программирования почти никогда не применяют при исследовании дифференцируемых целевых функций: для них больше подходит метод Лагранжа, так как он более универсален. Но если в задаче (I) целевая функция $f(x)$ разрывна или определена на каком-то дискретном (конечном или счетном) множестве, то методы прямой или обратной прогонки могут быть очень полезны.

Вопросы и задания

1. Решите задачи из примеров 1.1, 1.3, 1.5 методом прямой прогонки, а задачи из примеров 1.4 и 1.6 – методом обратной прогонки. Решите эти же задачи методом Лагранжа. Сравните ответы.
2. Решите любым из методов динамического программирования следующие задачи.

а) $\begin{cases} 4x_1^3 + x_2^3 + 3x_3 \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \to \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3^3 \to \min, \\ x_1 + x_2 \cdot x_3 = 1, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3^3 \to \max, \\ x_1 + x_2 \cdot x_3 = 1, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3. \end{cases}$

3. Можно ли при решении этих задач действовать не только методами прямой или обратной прогонки, но и как-то иначе? Сколько существует всего различных вариантов поиска экстремумов методами динамического программирования?
4. Пусть известно, что мультипликативная функция $f(x)$ принимает только положительные значения. Покажите, что для $f(x)$ верен принцип оптимальности Беллмана, аналогичный принципу (1.1). С этой целью

а) покажите, что функция $g(x) = \ln f(x)$ аддитивна,

б) объясните, почему $f(x)$ и $g(x)$ достигают наибольшего и наименьшего значения одновременно.

2. Разрывные функции. Функции, заданные на конечном множестве.

Рассмотрим следующую задачу условной оптимизации.

Пример 2.1.

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \ge 0, i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

где

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 1, \text{если } x_1 < \dfrac{1}{2}, \\ 0, \text{если } x_1 \ge \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 2, \text{если } x_2 < \dfrac{1}{3}, \\ -1, \text{если } x_2 \ge \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

$$f_3(x_3) = \begin{cases} 0, \text{если } x_3 < \dfrac{3}{4}, \\ 1, \text{если } x_3 \ge \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Начнем решать эту задачу методом прямой прогонки.

1) $x_1 = M_1 \in [0;1]$ и $F_1(M_1) = \begin{cases} 1, \text{если } M_1 < \dfrac{1}{2}, \\ 0, \text{если } M_1 \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

2) $x_1 + x_2 = M_2$, где $M_2 \in [0;1]$.

Учитывая, что для функции $f_1(x_1)$ «критическим» значением будет $x_1 = \frac{1}{2}$, а для функции $f_2(x_2)$, соответственно, $x_2 = \frac{1}{3}$, рассмотрим по отдельности несколько случаев, а результаты наших рассуждений обобщим в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

	$M_1 \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$	$M_1 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$	$F_2(M_2)$
$M_2 \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$	1+2	–	3
$M_2 \in \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$	1+2	0+2	3
$M_2 \in \left[\frac{5}{6}; 1\right]$	1–1	0+2	2

Если $M_2 < \frac{1}{2}$, то M_1 не может быть больше либо равно $\frac{1}{2}$. В соответствующей ячейке таблицы стоит прочерк. Если $M_1 \geq \frac{1}{2}$ и $M_2 \in \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$, то $x_2 < \frac{1}{3}$ и $f_2(x_2) = 2$. Если $M_2 \geq \frac{5}{6}$, то при $M_1 \geq \frac{1}{2}$ x_2 может оказаться и меньше, и больше, чем $\frac{1}{3}$. Мы отдаем предпочтение тому варианту, когда значение $f_1(x_1) + f_2(x_2)$ больше. Аналогичным образом заполняем столбец $M_1 < \frac{1}{2}$. (Ячейки, в которых сумма $f_1(x_1) + f_2(x_2)$ определялась не однозначно, заштрихованы.) Теперь выбираем наибольшее значение в каждой строке и записываем его в последнем столбце нашей таблицы. Это и будет $F_2(M_2)$, которое меняется в зависимости от M_2.

3) $x_1 + x_2 + x_3 = M_3 = 1$. Чтобы найти $F_3(M_3)$, воспользуемся таблицей 2.2. В каждой ячейке первое слагаемое равно $F_2(M_2)$, а второе $f_3(x_3)$, причем в первом

столбце $f_3(x_3)$ опять определено неоднозначно, и мы выбираем наибольший из двух возможных вариантов.

Таблица 2.2.

	$M_2 \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$	$M_2 \in \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$	$M_2 \in \left[\frac{5}{6}; 1\right]$	$F_3(M_3)$
$M_3 = 1$	3+1	3+0	2+0	4

Итак, наибольшее значение нашей функции равно 4 и достигается оно в том случае, когда $M_2 < \frac{1}{2}$, а $x_3 \ge \frac{3}{4}$ (мы «вспоминаем», какой из двух вариантов был лучше в заштрихованной ячейке). Возвращаясь к таблице 2.1, видим, что для $M_2 < \frac{1}{2}$ максимум $F_2(M_2)$ достигается при $M_1 < \frac{1}{2}$. Соответствующее x_2 должно быть меньше, чем $\frac{1}{3}$. Иначе говоря, мы можем выбрать любые три числа x_1, x_2, x_3, лишь бы выполнялись неравенства $x_1 \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$, $x_2 \in \left[0; \frac{1}{3}\right)$, $x_3 \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$, а сумма $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Заметим, что при решении этой задачи метод прямой прогонки оказался не слишком удобным. Во-первых, выбор строк в таблице 2.1 оказался достаточно искусственным: с таким же успехом мы могли рассмотреть случаи $M_2 \in \left[0; \frac{1}{3}\right)$, $M_2 \in \left[\frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$ и $M_2 \in \left[\frac{5}{6}; 1\right]$. Тогда «неоднозначность» появилась бы в других ячейках таблицы. Во-вторых, определяя x_1, x_2 и x_3 по известным M_1, M_2 и M_3, нам приходилось «вспоминать», какие именно значения переменных мы выбирали в заштрихованных ячейках. Причина этих неудобств кроется в том, что функции $f_i(x_i)$ принимают одинаковые значения на бесконечно большом количестве x_i, из-за чего возникает чрезмерная «свобода» при поиске оптимального значения: недаром у нас получилось бесконечно много ответов. Ситуация меняется, если наложить на переменные более жёсткие ограничения.

Пример 2.2 (продолжение примера 2.1).

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i = \frac{k}{6},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \end{cases}$$

где функции $f_i(x_i)$ такие же, как в предыдущем случае. Поскольку на сей раз множество определения функции $f(x)$ конечно, мы сможем составить таблицы,

в которых будут учтены *все* возможные значения M_1, M_2 и M_3.
1) $x_1 = M_1$. Значения функции $F_1(M_1) = \max\limits_{x_1 = M_1} f_1(x_1)$ записаны в таблице 2.3.

Таблица 2.3.[2]

$x_1 = M_1$	$f_1(x_1)$	$F_1(M_1)$
0	1	1
1/6	1	1
2/6	1	1
3/6	0	0
4/6	0	0
5/6	0	0
6/6	0	0

2) $x_1 + x_2 = M_2$. Зафиксировав M_2, выпишем все возможные значения $F_1(M_1) + f_2(x_2)$, а затем выберем наибольшее из них. Это и будет $F_2(M_2)$. Результаты вычислений записаны в таблице 2.4. (Прочерки стоят в тех ячейках, которые соответствуют «невозможным» парам (M_1, M_2).)

Таблица 2.4.

$x_1 + x_2 = M_2$	$F_1(M_1) + f_2(x_2)$							$F_2(M_2)$	M_1^*
	$M_1 = 0$	$M_1 = \frac{1}{6}$	$M_1 = \frac{2}{6}$	$M_1 = \frac{3}{6}$	$M_1 = \frac{4}{6}$	$M_1 = \frac{5}{6}$	$M_1 = \frac{6}{6}$		
0	1+2	–	–	–	–	–	–	3	0
1/6	1+2	1+2	–	–	–	–	–	3	0 или $\frac{1}{6}$
2/6	1–1	1+2	1+2	–	–	–	–	3	$\frac{1}{6}$ или $\frac{2}{6}$
3/6	1–1	1–1	1+2	0+2	–	–	–	3	$\frac{2}{6}$
4/6	1–1	1–1	1–1	0+2	0+2	–	–	2	$\frac{3}{6}$ или $\frac{4}{6}$
5/6	1–1	1–1	1–1	0–1	0+2	0+2	–	2	$\frac{4}{6}$ или $\frac{5}{6}$
6/6	1–1	1–1	1–1	0–1	0–1	0+2	0+2	2	$\frac{5}{6}$ или $\frac{6}{6}$

Так, заполняя ячейку $M_2 = 0, M_1 = 0$, видим, что $F_1(M_1) = 1$ (это было записано

[2] Для наглядности мы не сокращаем дроби.

в таблице 2.3), а соответствующее $x_2 = 0$, откуда $f_2(x_2) = 2$. В ячейке $M_1 = \frac{2}{6}$, $M_2 = \frac{3}{6}$ $F_1(M_1) = 1$, а $x_2 = \frac{1}{6}$, откуда $f_2(x_2) = 2$ и т. д. Кроме того, полезно запомнить, при каком именно M_1 достигался искомый максимум в каждой из строк. Поэтому мы добавили в таблицу 2.4 еще один столбец M_1^*, где и написали соответствующие значения M_1. Если бы мы решали эту задачу на компьютере, то при переходе к следующему этапу таблицу 2.4 можно было бы стереть, оставив только два последних столбца и экономя тем самым машинную память.
3) $x_1 + x_2 + x_3 = M_3 = 1$. Составляем следующую таблицу, аналогичную предыдущей. Поскольку в нашей задаче третий этап является последним, значение M_3 определено однозначно, и в таблице 2.5 есть только одна строка.

Таблица 2.5.

$x_1+x_2+x_3=M_3$	$F_2(M_2)+f_3(x_3)$							$F_3(M_3)$	M_2^*
	$M_2 = 0$	$M_2 = \frac{1}{6}$	$M_2 = \frac{2}{6}$	$M_2 = \frac{3}{6}$	$M_2 = \frac{4}{6}$	$M_2 = \frac{5}{6}$	$M_2 = \frac{6}{6}$		
1	3+1	3+1	3+0	3+0	2+0	2+0	2+0	4	0 или $\frac{1}{6}$

Итак, возможны следующие варианты. Если $M_2^* = 0$, то $M_1^* = 0$ (первая строчка таблицы 2.4). Иначе говоря, $x_1 = M_1^* = 0,\ x_2 = M_2^* - x_1 = 0,\ x_3 = 1 - M_2^* = 1$. Если $M_2^* = \frac{1}{6}$, то $M_1^* = 0$ или $\frac{1}{6}$ (вторая строчка таблицы 2.4). В первом случае $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{6},\ x_3 = \frac{5}{6}$. Во втором случае $x_1 = \frac{1}{6},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{5}{6}$. Во всех трех точках $(0;0;1), \left(0;\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$ и $\left(\frac{1}{6};0;\frac{5}{6}\right)$ значение целевой функции $f(x) = 4$. Заметим, что полученный нами ответ представляет собой частный случай ответа к задаче из примера 2.1.

Разберем еще один похожий пример.

Пример 2.3.

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i = \frac{k}{3},\ k = 0, 1, 2, 3, \end{cases}$$

где значения функций $f_1(x_1), f_2(x_2)$ и $f_3(x_3)$ заданы в таблице 2.6.

Таблица 2.6.

x_i	$f_1(x_1)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_3)$
0	2	0	1
1/3	1	1	2
2/3	0	–1	0
1	0	–1	0

Как видим, множество допустимых значений D здесь опять конечно. Поскольку D относительно невелико, данную задачу можно решить не только таблично, но и графически. А именно, разобьем нашу «деятельность» по решению данной задачи на три этапа, в течение которых мы будем постепенно «накапливать» значения наших переменных. Так, к концу первого этапа мы «накопим» $M_1 = x_1$, к концу второго этапа $M_2 = x_1 + x_2$, к концу третьего этапа $x_1 + x_2 + x_3 = M_3 = 1$. Различные варианты нашего поведения можно изобразить в виде пути: $0 \to M_1 \to M_2 \to 1$. Все возможные в нашей задаче пути изображены на рисунке 2.1.

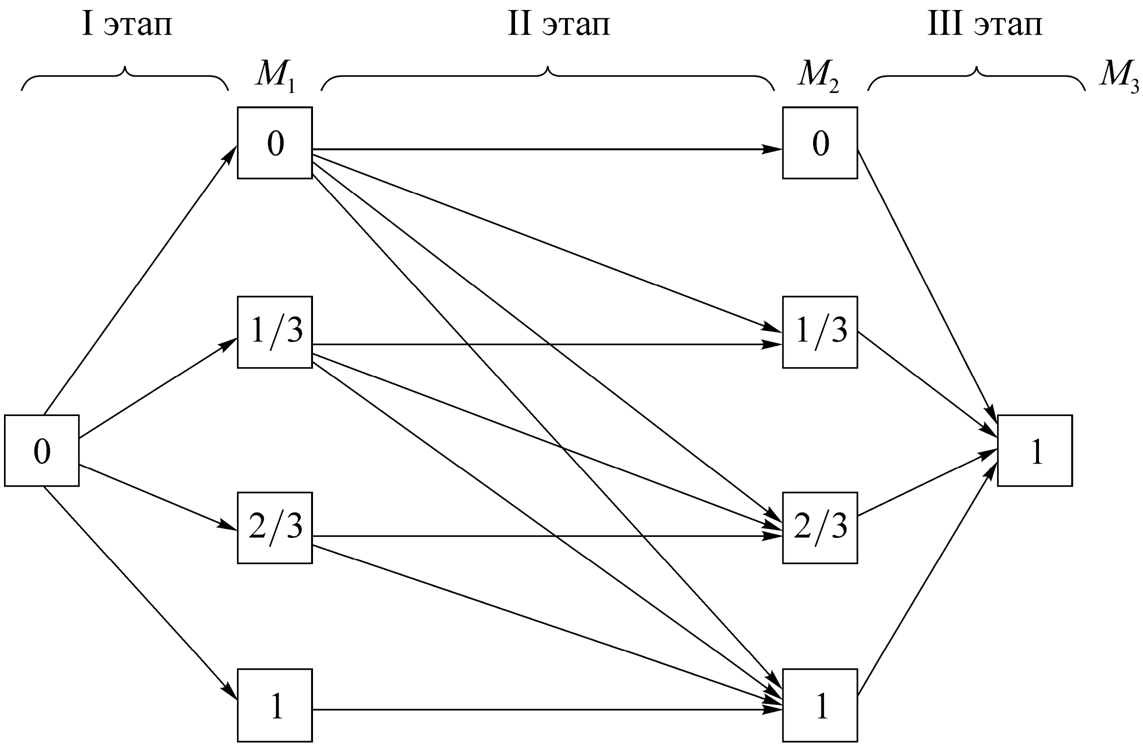

Рисунок 2.1.

Кроме того, на каждом этапе мы «накапливаем» значение функции $f(x)$. Например, на первом этапе мы получим $f_1(x_1)$, которое будет зависеть от того, каким путем мы пойдем. На втором этапе мы получим $f_1(x_1) + f_2(x_2)$, на третьем $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$. Выбирая путь, мы тем самым определяем то значение $f(x)$, с которым мы придем в конечный пункт $M_3 = 1$. Нам надо найти такой путь, на котором это значение окажется наибольшим. С этой целью над каждой из стрелочек на рисунке 2.1 мы будем подписывать накопленное к данному моменту значение целевой функции. На первом этапе ситуация выглядит так (см. рис. 2.2):

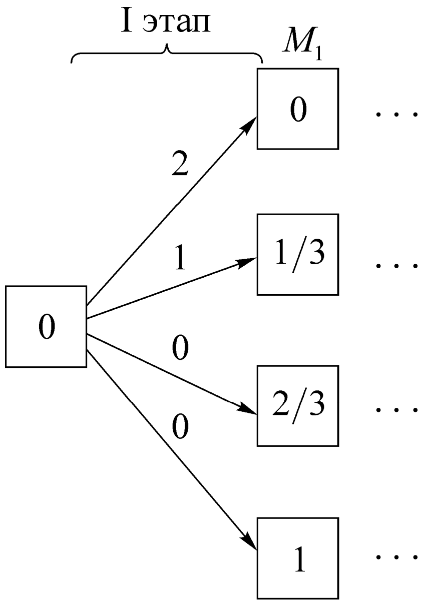

Рисунок 2.2.

Действительно, если мы выбираем путь $0 \to 0 \to \ldots$, то $x_1 = 0$ и $f_1(0) = 2$. Если наш путь $0 \to \frac{1}{3} \to \ldots$, то $x_1 = \frac{1}{3}$ и $f_1\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ и т. д.

На следующем этапе рассмотрим каждое из возможных значений M_2 по отдельности, оценим все пути, ведущие в данное значение M_2 и выберем оптимальный (см. рис. 2.3–2.6, жирными стрелочками изображены оптимальные пути).

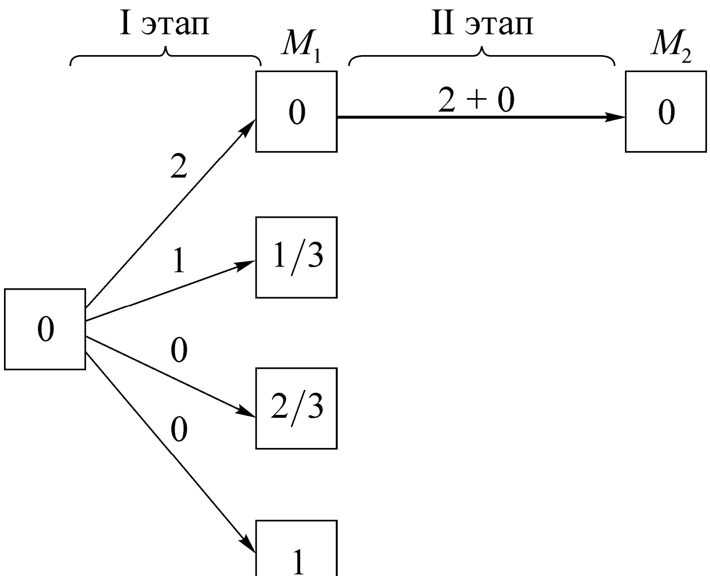

Рисунок 2.3. $M_2 = 0$.

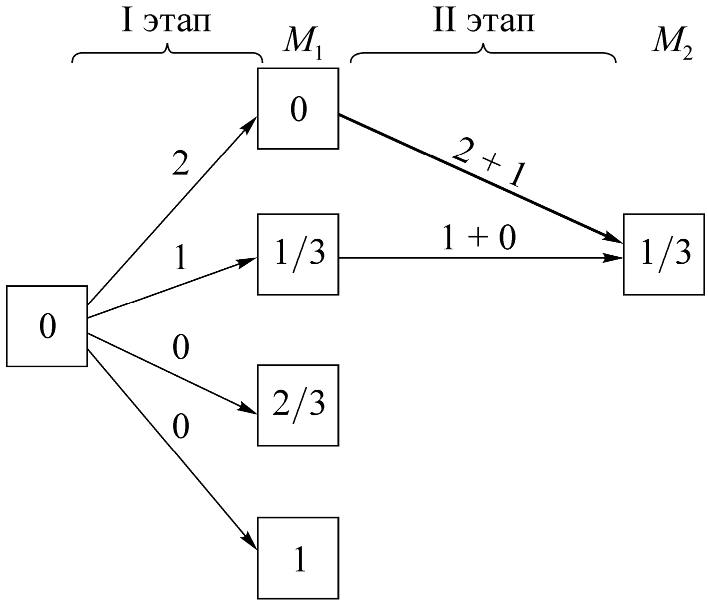

Рисунок 2.4. $M_2 = \dfrac{1}{3}.$

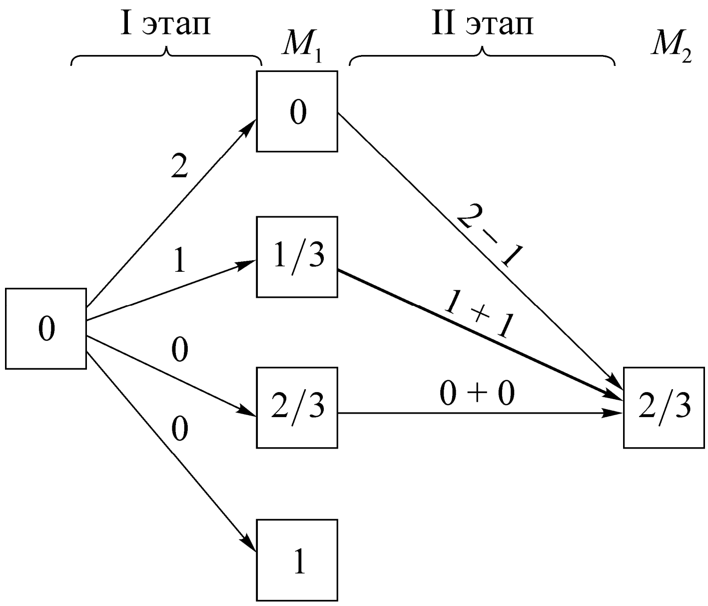

Рисунок 2.5. $M_2 = \dfrac{2}{3}.$

Переходя к третьему этапу решения задачи, оставим в нашей схеме только оптимальные пути, найденные на этапе II. В частности, поскольку из квадрата $M_1 = 1$ не выходит ни одного оптимального пути, этот квадрат можно не изображать.

На рисунке 2.7 изображено окончательное решение нашей задачи.

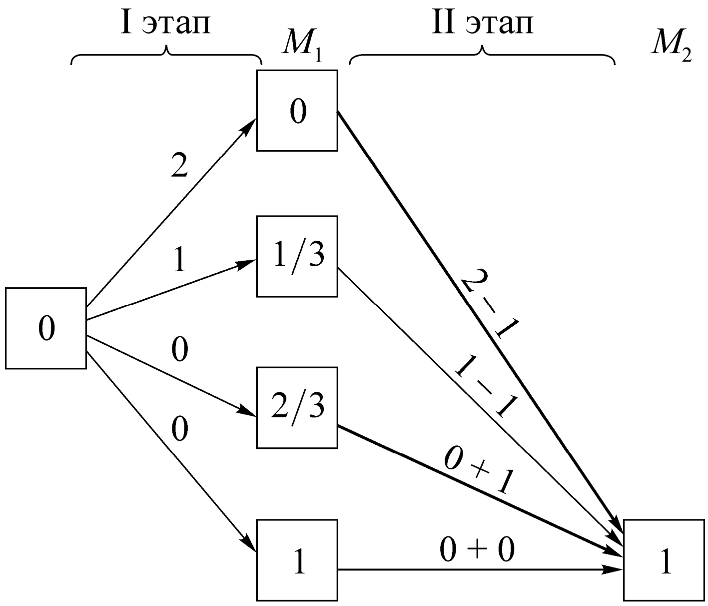

Рисунок 2.6. $M_2 = 1$.

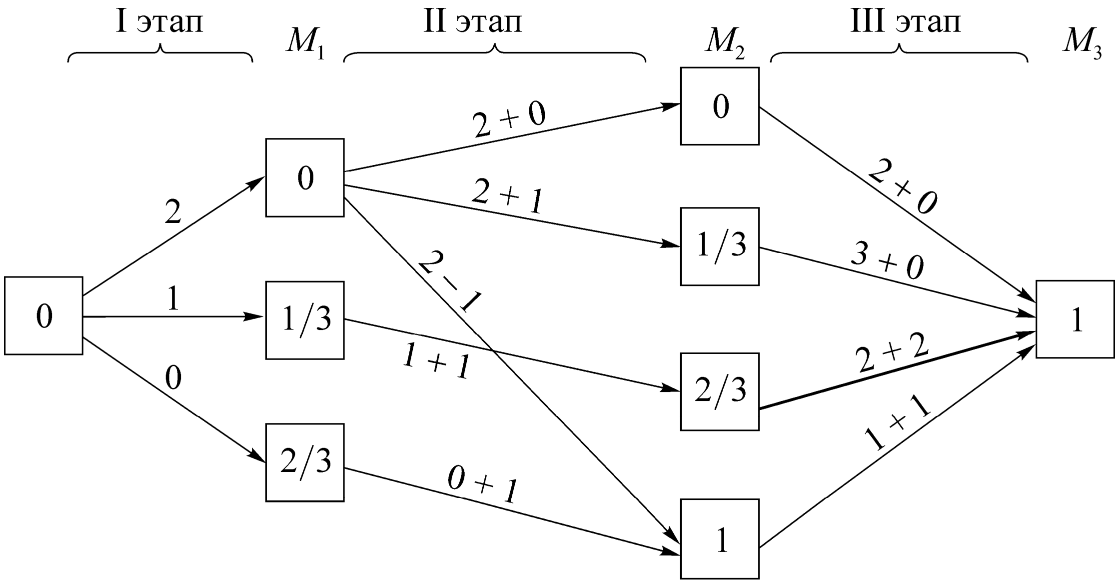

Рисунок 2.7.

Мы видим, что наилучший путь – это путь $0 \to \frac{1}{3} \to \frac{2}{3} \to 1$. Накопленное значение целевой функции на этом пути равно четырем. Поскольку $M_1 = \frac{1}{3}$, $M_2 = \frac{2}{3}$, $M_3 = 1$, находим, что $x_1 = M_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = M_2 - M_1 = \frac{1}{3}$, $x_3 = M_3 - M_2 = \frac{1}{3}$.

Теперь решим эту же самую задачу таблично, воспользовавшись методом прямой прогонки. Результаты наших вычислений записаны в таблицах 2.7 – 2.9. Легко увидеть аналогию между табличным и графическим методами решения нашей задачи.

Таблица 2.7.

$x_1 = M_1$	$f_1(x_1)$	$F_1(M_1)$
0	2	2
1/3	1	1
2/3	0	0
1	0	0

Таблица 2.8.

$x_1 + x_2 = M_2$	$F_1(M_1) + f_2(x_2)$				$F_2(M_2)$	M_1^*
	$M_1 = 0$	$M_1 = \frac{1}{3}$	$M_1 = \frac{2}{3}$	$M_1 = 1$		
0	2+0	–	–	–	2	0
1/3	2+1	1+0	–	–	3	0
2/3	2–1	1+1	0+0	–	2	1/3
1	2–1	1–1	0+1	0+0	1	0 или 2/3

Таблица 2.9.

$x_1 + x_2 + x_3 = M_3$	$F_2(M_2) + f_3(x_3)$				$F_3(M_3)$	M_2^*
	$M_2 = 0$	$M_2 = \frac{1}{3}$	$M_2 = \frac{2}{3}$	$M_2 = 1$		
1	2+0	3+0	2+2	1+1	4	2/3

Как видим, ответ получается тем же самым: $f(x) = 4$ в точке $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

В следующих примерах условия, связывающие переменные, не аддитивны, но поскольку множество допустимых значений D конечно, сложностей при построении таблиц не возникает.

Пример 2.4.

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \to \max, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 12, \\ x_i \in N, i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

где

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 3, \text{ если } x_1 > 5, \\ 2, \text{ если } x_1 \le 5, \end{cases}$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_2 < 6, \\ 1, \text{ если } x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$$f_3(x_3) = \begin{cases} -2, \text{ если } x_3 < 7, \\ 1, \text{ если } x_3 \ge 7. \end{cases}$$

На сей раз воспользуемся методом обратной прогонки. Результаты вычислений записаны в таблицах 2.10 – 2.12. (Заметим, что в качестве M_3 и M_2 мы брали только натуральные делители числа 12. Кроме того, при составлении таблицы 2.11 мы учитывали, на какие натуральные множители можно разложить число $M_2 = x_2 \cdot x_3$.)

Таблица 2.10.

$x_3 = M_3$	$f_3(x_3)$	$F_3(M_3)$
1	–2	–2
2	–2	–2
3	–2	–2
4	–2	–2
6	–2	–2
12	1	1

Таблица 2.11.

$x_2 \cdot x_3 = M_2$	$F_3(M_3)+f_2(x_2)$						$F_2(M_2)$	M_3^*
	$M_3 = 1$	$M_3 = 2$	$M_3 = 3$	$M_3 = 4$	$M_3 = 6$	$M_3 = 12$		
1	–2+0	–	–	–	–	–	–2	1
2	–2+0	–2+0	–	–	–	–	–2	1 или 2
3	–2+0	–	–2+0	–	–	–	–2	1 или 3
4	–2+0	–2+0	–	–2+0	–	–	–2	1, 2 или 4
6	–2+1	–2+0	–2+0	–	–2+0	–	–1	1
12	–2+1	–2+1	–2+0	–2+0	–2+0	1+0	1	12

Таблица 2.12.

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = M_1$	$F_2(M_2)+f_1(x_1)$						$F_1(M_1)$	M_2^*
	$M_2 = 1$	$M_2 = 2$	$M_2 = 3$	$M_2 = 4$	$M_2 = 6$	$M_2 = 12$		
12	–2+3	–2+3	–2+2	–2+2	–1+2	1+2	3	12

Итак, максимальное значение целевой функции $f(x) = 3$. Оно достигается при $M_1^* = 12,\ M_2^* = 12,\ M_3^* = 12$. Это означает, что $x_3^* = M_3^* = 12,\ x_2^* = \dfrac{M_2^*}{M_3^*} = 1,$

$x_1^* = \dfrac{M_1^*}{M_2^*} = 1$.

Пример 2.5.

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \to \max, \\ x_1 + x_2 \cdot x_3 = 12, \\ x_i \in N,\ i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

где функции $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ и $f_3(x_3)$ те же, что и в предыдущем примере.

Воспользуемся методом обратной прогонки, выбрав $M_3 = x_3$, $M_2 = x_2 \cdot x_3$, $M_1 = x_1 + x_2 \cdot x_3$. Поскольку произведение $x_2 \cdot x_3$ может принимать любое значение от 1 до 12, у нас есть 12 возможностей выбрать M_3 (см. табл. 2.13).

Таблица 2.13.

$x_3 = M_3$	$f_3(x_3)$	$F_3(M_3)$
1	–2	–2
2	–2	–2
3	–2	–2
4	–2	–2
5	–2	–2
6	–2	–2
7	1	1
8	1	1
9	1	1
10	1	1
11	1	1
12	1	1

В следующей таблице M_2 и M_3 в принципе могут принимать по 12 разных значений, но мы учитываем, что M_2 делится на M_3 без остатка (см. табл. 2.14).

Таблица 2.14.

M_3 / $x_2 \cdot x_3 = M_2$	$F_3(M_3) + f_2(x_2)$												$F_2(M_2)$	M_3^*
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1	-2+0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–2	1
2	-2+0	-2+0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–2	1 или 2
3	-2+0	–	-2+0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–2	1 или 3
4	-2+0	-2+0	–	-2+0	–	–	–	–	–	–	–	–	–2	1, 2 или 4
5	-2+0	–	–	–	-2+0	–	–	–	–	–	–	–	–2	1 или 5
6	-2+1	-2+0	-2+0	–	–	-2+0	–	–	–	–	–	–	–1	1
7	-2+1	–	–	–	–	–	1+0	–	–	–	–	–	1	7
8	-2+1	-2+0	–	-2+0	–	–	–	1+0	–	–	–	–	1	8
9	-2+1	–	-2+0	–	–	–	–	–	1+0	–	–	–	1	9
10	-2+1	-2+0	–	–	-2+0	–	–	–	–	1+0	–	–	1	10
11	-2+1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1+0	–	1	11
12	-2+1	-2+1	-2+0	-2+0	–	-2+0	–	–	–	–	–	1+0	1	12

Заполняя таблицу 2.15, учитываем, что $x_1 = M_1 - M_2$.

Таблица 2.15.

M_2 / $x_1 + x_2 \cdot x_3 = M_1$	$F_2(M_2)+f_1(x_1)$												$F_1(M_1)$	M_2^*
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
12	-2+3	-2+3	-2+3	-2+3	-2+3	-1+3	1+2	1+2	1+2	1+2	1+2	–	3	7, 8, 9, 10 или 11

Оптимальному значению целевой функции $f(x)=3$ соответствуют пять возможных M_2^*. Но заметим, что в каждом из пяти случаев $M_3^* = M_2^*$. Это означает, что каждый раз $x_3^* = M_2^*$, а $x_2^* = 1$. Учитывая, что $x_1^* = 12 - M_2^*$, находим пять точек, в которых функция $f(x)$ достигает наибольшего значения:
$x^{(1)} = (5;1;7)$, $x^{(2)} = (4;1;8)$, $x^{(3)} = (3;1;9)$, $x^{(4)} = (2;1;10)$ и $x^{(5)} = (1;1;11)$.

Вопросы и задания

1. Решите задачу из примера 2.1 методом прямой прогонки, рассматривая на втором этапе три варианта: $M_2 \in \left[0;\frac{1}{3}\right)$, $M_2 \in \left[\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$ и $M_2 \in \left[\frac{5}{6};1\right]$.
2. Решите задачи из примеров 2.2 и 2.3 методом обратной прогонки, а задачу из примера 2.4 – методом прямой прогонки. Можно ли решить методом прямой прогонки задачу из примера 2.5?
3. Решите задачу 2.3 методом обратной прогонки графически.
4. Составьте программу, которая находит наибольшее значение функции в задаче 2.3. Как изменится эта программа, если искать не наибольшее, а наименьшее значение функции?
5. Можно ли решить методами динамического программирования задачу о кратчайшем пути?
6. Пусть функции f_1, f_2 и f_3 заданы таблично (см. табл. 2.16).

Таблица 2.16.

x_i	1	2	3	4	5	6	>6
$f_1(x_1)$	–1	–2	0	1	2	1	–1
$f_2(x_2)$	3	2	1	0	1	2	3
$f_3(x_3)$	–2	–5	–4	0	2	4	5

Пусть $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$. Решите методами динамического программирования следующие задачи условной оптимизации.
а)

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ (x_1 + x_2) \cdot x_3 = 6, \\ x_i \in N, i = 1, 2, 3; \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ x_1^{x_2} + x_3 = 12, \\ x_i \in N, i = 1, 2, 3; \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} f(x) \to \max, \\ x_1^{x_2 - x_3} = 9 \quad \text{или} \quad x_1^{x_2 - x_3} = 4, \\ x_i \in N, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

3. Задача о капиталовложениях

В этом и следующем разделах мы рассмотрим примеры наиболее известных экономических моделей, которые можно записать в виде задач, решаемых методами динамического программирования. В качестве целевой функции $f(x)$ чаще всего выступает функция прибыли. Соответственно, $f_i(x_i)$ – прибыль на i-ом этапе деятельности. Следует отметить, что в подобных задачах аналитическое выражение для функции $f_i(x_i)$ присутствует далеко не всегда, и довольно часто $f_i(x_i)$ определяется отдельно в каждой конкретной ситуации, на основании словесной формулировки задачи. Немалого искусства требует иногда и правильное разбиение на этапы, которое также осуществляется при формализации словесного описания.

В этом смысле одна из наиболее простых моделей возникает при решении так называемой *задачи о капиталовложениях*. Сформулируем ее в том виде, в каком она предлагается в учебнике [2].

Предположим, что у нас есть некоторая денежная сумма M, которую мы можем инвестировать в n предприятий. У каждого из предприятий имеется несколько проектов, и нам надо выбрать, который из них мы будем поддерживать. В частности, мы можем вообще не инвестировать деньги в i-ое предприятие. В этом случае мы будем говорить, что мы выбрали нулевой проект. Предполагается, что мы всегда можем оценить $c_i(j)$ – расходы, необходимые для осуществления j-го проекта на i-ом предприятии, и $R_i(j)$ – прибыль от осуществления этого проекта. Для нулевых проектов $c_i(0) = R_i(0) = 0, i = 1, \ldots, n$. Необходимо решить, в какие проекты мы будем инвестировать деньги, если мы ставим перед собой задачу максимизации прибыли.

Рассмотрим эту задачу в частном случае, когда M=5 (каких-то условных денежных единиц, например, 5 млн. долларов), n=3, а $c_i(j)$ и $R_i(j)$ заданы в следующей таблице.

Таблица 3.1.

Проекты	Предприятия					
	1		2		3	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
0	0	0	0	0	0	0
1	1	5	2	8	1	3
2	2	6	3	9	–	–
3	–	–	4	12	–	–

Чтобы получить из этой задачи математическую модель, к которой можно применять методы динамического программирования, надо представить себе, что решение об инвестировании денег принимается поэтапно (даже если в действительности это не так): сначала мы определяем, какой проект выбрать на первом предприятии, затем – на втором, после этого – на третьем. Обозначим через k_1, k_2 и k_3 номер проекта, выбранного на первом, втором и третьем этапах соответственно. В нашем случае k_1 может принимать три значения, k_2 – четыре значения, а k_3 – только два. Кроме того, обозначим через x_i сумму, израсходованную на *i*-ом этапе. Очевидно, x_i зависит от k_i. На первый взгляд может показаться, что проще всего потребовать, чтобы $x_i = c_i(k_i)$. Однако в дальнейшем мы будем предполагать, что $x_i \geq c_i(k_i)$, иначе говоря, мы допускаем, что на *i*-ом этапе часть денег может быть «выброшена на ветер». Дело в том, что в действительности $c_1(k_1)+c_2(k_2)+c_3(k_3) \leq M$: мы не обязаны истратить на инвестиции всю имеющуюся сумму. В противоположном случае нам пришлось бы каждый раз решать, на какие слагаемые можно раскладывать $x_1 + x_2$ или $x_1 + x_2 + x_3$, а на какие – нельзя. Если учесть, что $c_i(k_i)$ принимает далеко не любые натуральные значения, это было бы весьма затруднительно. Вместе с тем мы будем считать, что $x_1 + x_2 + x_3 = M$, это упростит наши рассуждения на последнем этапе. Заметим еще, что имеет смысл рассматривать только натуральные значения x_i, потому что все $c_i(j)$ – натуральные числа.

Наконец, пусть f_i – это прибыль, полученная на *i*-ом этапе. В нашем случае $f_i = R_i(k_i)$. Формально мы можем записать задачу условной оптимизации:

$$f_1(k_1)+f_2(k_2)+f_3(k_3) \to \max,$$

$$\begin{cases} c_1(k_1)+c_2(k_2)+c_3(k_3) \leq 5, \\ k_1 = 0,1,2;\ k_2 = 0,1,2,3;\ k_3 = 0,1. \end{cases}$$

В действительности же при решении этой задачи, то есть при заполнении таблиц, проще рассуждать словесно, исходя из экономического смысла введенных переменных и функций.

Воспользуемся методом прямой прогонки.

1) $x_1 = M_1$. Здесь M_1 понимается как сумма, израсходованная на первом этапе.

Поскольку $c_i(k_i) \le x_i \le M$, у нас есть шесть возможностей: M_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5. Например, M_1=0 означает, что мы не инвестируем деньги в первое предприятие и сохраняем всю сумму для двух следующих этапов. Если M_1=1, то мы можем вложить деньги в первый проект или никуда их не вкладывать, в любом случае на два следующих этапа остаются 4 ден. ед. (Возможно, 1 ден. ед. была израсходована на какие-то другие цели). Рассуждая аналогичным образом, заполняем таблицу 3.2.

Таблица 3.2.

M_1	$f_1(k_1)=R_1(k_1)$			$F_1(M_1)$	k_1^*
	$k_1=0$	$k_1=1$	$k_1=2$		
0	0	–	–	0	0
1	0	5	–	5	1
2	0	5	6	6	2
3	0	5	6	6	2
4	0	5	6	6	2
5	0	5	6	6	2

Заметим, что здесь $F_1(M_1) = \max\limits_{c_1(k_1)\le M_1} f_1(k_1)$.

2) $x_1 + x_2 = M_2$, где M_2 – сумма, израсходованная на первых двух этапах (на инвестиции или в каких-то других целях). Нам надо найти

$$F_2(M_2) = \max_{c_1(k_1)+c_2(k_2)\le M_2} \left(f_1(k_1) + f_2(k_2)\right) = \max_{M_1+c_2(k_2)=M_2} \left(F_1(M_1) + R_2(k_2)\right) =$$
$$= \max_{c_2(k_2)\le M_2} \left(F_1(M_2 - c_2(k_2)) + R_2(k_2)\right).$$

Действительно, если на втором этапе мы выбрали проект k_2, то $M_2 - c_2(k_2)$ – это *максимальная* сумма, которую мы можем израсходовать на первом этапе. Но поскольку $F_1(M_1)$ возрастает с увеличением M_1, нам выгоднее выбрать как можно большее значение M_1. Поэтому условие $c_1(k_1) + c_2(k_2) \le M_2$ мы заменили на условие $M_1 + c_2(k_2) = M_2$.

Заполняем таблицу 3.3.

Таблица 3.3.

M_2	$F_1(M_2 - c_2(k_2)) + R_2(k_2)$				$F_2(M_2)$	k_2^*
	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$		
0	0	–	–	–	0	0
1	5	–	–	–	5	0
2	6	8	–	–	8	1
3	6	13	9	–	13	1
4	6	14	14	12	14	1 или 2
5	6	14	15	17	17	3

Как и раньше, M_2 принимает любые целые значения от 0 до 5. Если M_2, например, равно 1, то на втором этапе мы деньги не инвестируем, так как самый дешевый проект требует хотя бы двух ден. ед. Таким образом, на первом этапе мы можем инвестировать максимум 1 ден. ед., а это в лучшем случае принесет нам 5 ден. ед. прибыли. Остальные строки таблицы заполняются аналогично.

3) $x_1 + x_2 + x_3 = M_3$, где $M_3 = M = 5$ ден. ед. Нам надо найти

$$F_3(M_3) = \max_{c_1(k_1)+c_2(k_2)+c_3(k_3)\le M_3} \left(f_1(k_1) + f_2(k_2) + f_3(k_3)\right) = \max_{M_2+c_3(k_3)=M_3} \left(F_2(M_2) + f_3(k_3)\right) =$$

$$= \max_{c_3(k_3)\le M_3} \left(F_2(M_3 - c_3(k_3)) + R_3(k_3)\right).$$

Учитывая, что $M_3 = 5$, заполняем таблицу 3.4.

Таблица 3.4.

$x_1 + x_2 + x_3 = M_3$	$F_2(M_3 - c_3(k_3)) + R_3(k_3)$		$F_3(M_3)$	k_3^*
	$k_3 = 0$	$k_3 = 1$		
5	17	17	17	0 или 1

Итак, максимально возможная прибыль составляет 17 ден. ед. Если k_3^*=0, то $c_3(k_3^*) = 0$ и $M_2 = M_3 - c_3(k_3^*) = 5 - 0 = 5$. В этом случае из таблицы 3.3 следует, что k_2^*=3, а $M_1 = M_2 - c_2(k_2^*) = 5 - 4 = 1$. Теперь по таблице 3.2 определяем, что k_1^*=1.

Если k_3^*=1, то $c_3(k_3^*) = 1$ и $M_2 = 5 - 1 = 4$. Тогда k_2^*=1 или k_2^*=2. В первом случае $M_1 = 4 - 2 = 2$ и k_1^*=2. Во втором случае $M_1 = 4 - 3 = 1$ и k_1^*=1. Таким образом, наибольшую прибыль нам могут принести следующие комбинации проектов: (1; 3; 0), (2; 1; 1) или (1; 2; 1). Заметим, что во всех трех вариантах $c_1(k_1) + c_2(k_2) + c_3(k_3) = 5$, то есть мы направили на инвестиции всю имеющуюся у нас сумму. В принципе, это естественно, так как «выбрасывание денег на ветер» прибыли не приносит.

Отметим еще один немаловажный факт. При решении этой задачи целевая функция зависела от *номера выбранного проекта*, то есть от k_i. Вместе с тем область допустимых решений D зависела от *израсходованных сумм*, то есть от x_i, которые были связаны с k_i ограничениями типа неравенства: $x_i \ge c_i(k_i)$. (В предыдущих разделах фактически имели место равенства $x_i = k_i$.) Мы будем говорить, что набор $\{k_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ задает нам *управления* экономической системой, а набор $\{x_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ или непосредственно зависящий от него набор $\{M_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ определяет ее *состояния* на различных этапах решения задачи. Каждый раз, задавая очередное управление k_i, мы можем определить, в какое состояние M_i перейдет наша система (при условии, что мы знали, каково было ее предыдущее состояние M_{i-1}). Так, выбирая проект, который мы хотим инвестировать у i-ого предприятия, мы одновременно определяем сумму, которую мы израсходуем *к концу i-ого этапа* (и сумму, которая останется у нас для инвестиций на всех остальных этапах). Конечно, для этого мы должны знать, сколько денег мы уже успели израсходовать *к началу i-ого этапа.* Решая задачу оптимизации, мы задаем *последовательность управлений*, именно она и служит ответом в данной задаче. Вместе с тем мы должны следить за состоянием системы: у нас есть *множество допустимых состояний*, за пределы которого выходить нельзя.

В следующем разделе мы рассмотрим математическую модель, в которой различие между управлениями и состояниями проступает еще более отчетливо.

Вопросы и задания

1. Решите задачу о капиталовложениях в случаях, когда $c_i(k_i)$ и $R_i(k_i)$ заданы в таблице 3.1, а $M = 4$ или $M = 6$ ден. ед.
2. Решите задачу о капиталовложениях, рассмотренную в этом разделе, методом обратной прогонки. Как в этом случае определяются состояния системы? Как они связаны с управлениями системой?
3. Объясните, почему при решении задачи о капиталовложениях мы заменили условие
$$c_1(k_1)+c_2(k_2)+c_3(k_3)\le M_3$$
на условие
$$M_2+c_3(k_3)=M.$$
Как выглядят аналогичные условия в методе обратной прогонки? Каково их экономическое истолкование?
4. Решите задачи из задания 1 графически.
5. Рассмотрите задачу о капиталовложениях, в которой $c_1(k_1)+c_2(k_2)+c_3(k_3)=M$. (Для простоты можно взять $M = 5$, а $c_i(k_i)$ и $R_i(k_i)$ из таблицы 3.1.) Как в этом случае изменятся таблицы 3.2 – 3.4?
6. Всегда ли оптимальное управление обладает тем свойством, что $c_1(k_1^*)+c_2(k_2^*)+\ldots+c_n(k_n^*)=M$?
Рассмотрите пример, когда $M = 6$, а $c_i(k_i)$ и $R_i(k_i)$ заданы в следующей таблице.

Таблица 3.5.

Проекты	c_1	R_1	c_2	R_2
0	0	0	0	0
1	2	4	3	5
2	–	–	5	7

7. Рассмотрите следующую задачу о выборе учебного плана ([2]).

Студент, обучающийся в университете, обязан прослушать в течение учебного года десять различных курсов. Все дисциплины, которые преподаются в университете, разделяются на четыре цикла, и студент обязан прослушать хотя бы один курс по каждому циклу дисциплин. Поскольку курсы одного и того же цикла в какой-то мере повторяют друг друга, суммарная полезность каждого цикла дисциплин зависит от количества прослушанных курсов так, как показано в таблице 3.6. (Мы оценили полезность по 100-балльной шкале.)

Таблица 3.6.

Количество курсов / Цикл	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	25	50	60	80	100	100	100	100	100	100
II	20	70	90	100	100	100	100	100	100	100
III	40	60	80	100	100	100	100	100	100	100
IV	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Требуется решить, сколько курсов по каждому циклу дисциплин должен прослушать студент, чтобы суммарная полезность этих курсов была максимальна.

Сравните эту задачу с задачей о капиталовложениях, определите, каковы в данном случае управления системой и ее состояния. Решите эту задачу методами динамического программирования. Что изменится, если студент должен будет прослушать не более 10 курсов? Не менее 10 курсов?

4. Задача о найме работников

Рассмотрим следующую задачу ([1]).

Пример 4.1. Для функционирования некоторого предприятия в течение предстоящих четырех месяцев потребуются 3 работника в первом месяце, 4 работника – во втором, 5 – в третьем и 2 – в четвертом месяце. В данный момент на предприятии работают 2 сотрудника. Администрация планирует корректировать количество сотрудников в начале каждого месяца. На прием одного сотрудника необходимо затратить 9 ден. ед., на увольнение – 6 ден. ед. Расходы на содержание избыточного работника составляют 8 ден. ед. в месяц, а потери из-за нехватки персонала – 12 ден. ед. в месяц за каждое вакантное место. Определить, каким образом следует корректировать количество сотрудников, чтобы минимизировать суммарные издержки за рассматриваемый период.

Обозначим x_i, i = 0, 1, 2, 3, 4 количество сотрудников, работающих на предприятии в течение i-ого месяца. По условию задачи $x_0 = 2$ (текущий месяц считается нулевым). Сразу заметим, что $x_i \geq 0$, и, кроме того, естественно потребовать, чтобы $x_i \leq 5$, так как иначе в течение всего рассматриваемого периода на предприятии будут работать лишние сотрудники. Если учесть, что x_i может принимать только целые значения, то мы получаем, что x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Теперь обозначим k_i, i = 0, 1, 2, 3, 4 количество сотрудников, принятых на работу (если $k_i > 0$) или уволенных (если $k_i < 0$) *в конце i-ого месяца.* В частности, k_i = 0 означает, что в конце i-го месяца количество сотрудников не изменилось. (В условиях задачи невыгодно принимать и увольнять сотрудников одновременно, так как это влечет за собой дополнительные расходы, а квалификация, профессиональные качества работников предполагаются одинаковыми.) Отметим, что в силу ограничений, наложенных на x_i, $k_i \in [-5;5]$, $k_i \in Z$. В целом процесс корректировки численности сотрудников выглядит так, как изображено на рисунке 4.1. (Цифры вверху обозначают «идеальное» количество сотрудников на данный период, которое мы будем обозначать m_i.)

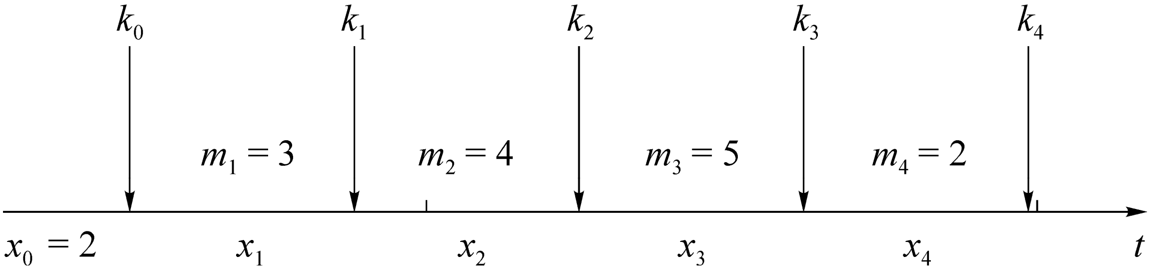

Рисунок 4.1.

Сравнивая данную задачу с предыдущей, легко понять, что $\{x_i\}_{i=0}^{4}$ – это набор состояний системы, а $\{k_i\}_{i=0}^{4}$ – набор управлений системой. Нам необходимо найти такой набор управлений, чтобы суммарные издержки (которые мы оценим, исходя из состояний системы), были как можно меньше. Состояния и управления, очевидно, взаимосвязаны: $x_{i+1} = x_i + k_i$, i = 0, 1, 2, 3, 4 (здесь x_5 – состояние системы в пятом месяце).

Поскольку изменение состояний системы происходит поэтапно, естественно искать оптимальные управления методами динамического программирования. Разобьем нашу задачу на этапы так, как показано на рисунке 4.2, и будем решать ее методом обратной прогонки.

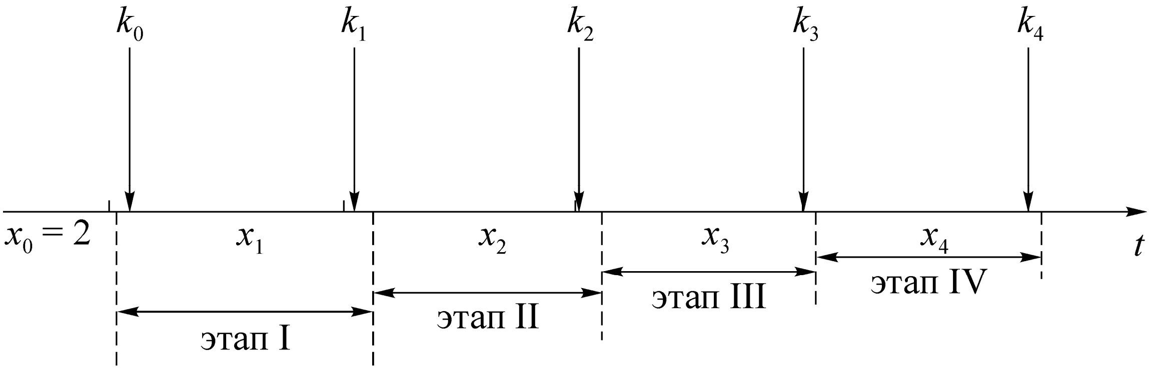

Рисунок 4.2.

Для удобства введем следующие две функции:

$$\tilde{n}(k_i) = \begin{cases} 9k_i, & \text{åñëè } k_i \ge 0, \\ -6k_i, & \text{åñëè } k_i < 0 \end{cases}$$

– расходы на приём (увольнение) сотрудников на i-ом этапе и

$$d_i(x_i)=\begin{cases}12(m_i-x_i),\ \text{если}\ x_i\le m_i,\\ 8(x_i-m_i),\ \text{если}\ x_i>m_i\end{cases}$$

– потери из-за нехватки персонала или из-за содержания избыточных работников. Наконец, пусть $F_i(x_i)$ – наименьшие возможные издержки *за все этапы, начиная с i-ого*, при условии, что к началу i-ого этапа система находится в состоянии x_i.

Этап IV На этом этапе нам надо найти $F_4(x_4)=\min\limits_{k_4} f_4(x_4,k_4)$,

где $f(x_4,k_4)=d_4(x_4)+c(k_4)$ – издержки, найденные в предположении, что мы выбрали управление k_4. Заполняем таблицу 4.1.

Таблица 4.1.

	$f_4=d_4(x_4)+c(k_4)$											$F_4(x_4)$	k_4^*
x_4 \ k_4	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5		
0	–	–	–	–	–	24	33	42	51	60	69	24	0
1	–	–	–	–	18	12	21	30	39	48	–	12	0
2	–	–	–	12	6	0	9	18	27	–	–	0	0
3	–	–	26	20	14	8	17	26	–	–	–	8	0
4	–	40	34	28	22	16	25	–	–	–	–	16	0
5	54	48	42	36	30	24	–	–	–	–	–	24	0

Мы получили практически очевидный результат: на последнем этапе не имеет смысла корректировать численность сотрудников, так как нам безразлично, чему равно x_5. Заметим, что эту же таблицу можно было заполнить и с помощью словесных рассуждений, например, таких: если $x_4=0$, то мы несем убытки 24 ден. ед., так как нам не хватает двух сотрудников. Увольнять нам некого, а если мы примем на работу, например, одного человека, то это будет стоить еще 9 ден. ед., то есть суммарные издержки составят 33 ден. ед. и т. д. Как видим, при заполнении таблицы проще всего найти издержки при $k_4=0$, а затем двигаться по строке влево, каждый раз увеличивая имеющуюся цифру на 6, или вправо, увеличивая издержки на 9. (Заметим, что мы учитывали тот факт, что x_4 и x_5 неотрицательны и не превосходят 5.)

Этап III Ищем

$$F_3(x_3)=\min_{k_3,k_4}\bigl(f_3(x_3,k_3)+f_4(x_3+k_3,k_4)\bigr)=\min_{k_3}\bigl(f_3(x_3,k_3)+F_4(x_3+k_3)\bigr).$$

Здесь $f_3(x_3,k_3)=d_3(x_3)+c(k_3)$ – издержки на 3 этапе, а $F_3(x_3)$ – *суммарные издержки* на 3 и 4 этапах в предположении, что к началу 3 этапа система находилась в состоянии x_3. Заполняем таблицу 4.2.

Таблица 4.2.

	$f_3(x_3,k_3)+F_4(x_3+k_3)$											$F_3(x_3)$	k_3^*
x_3 \ k_3	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5		
0	–	–	–	–	–	84	81	78	95	112	129	78	2
1	–	–	–	–	78	60	57	74	91	108	–	57	1
2	–	–	–	72	54	36	53	70	87	–	–	36	0
3	–	–	66	48	30	32	49	66	–	–	–	30	–1
4	–	60	42	24	26	28	45	–	–	–	–	24	–2
5	54	36	18	20	22	24	–	–	–	–	–	18	–3

Заметим, что при заполнении этой таблицы тоже можно рассуждать словесно: если в начале месяца у нас работал 1 человек (x_3 = 1), то у нас было 4 вакансии (m_3 = 5) и потери составили 48 ден. ед. Если мы в конце месяца примем на работу еще одного человека (k_3 = 1), то это будет нам стоить 9 ден. ед. и к началу следующего месяца у нас будет 2 сотрудника, а это означает, что на IV этапе издержек не будет. Итого получаем 48 + 9 = 57 ден. ед. При заполнении таблицы можно для удобства сгруппировать цифры во вспомогательные таблицы так, как показано на рисунке 4.3. (Для большей наглядности $d(x_3)$ и знак + проставлены на том уровне, который соответствует k_3 = 0.)

$x_3 = 0$

$d(x_3)$		$c(k_3)$		$F(x_3 + k_3)$
60	+	0	+	24
		9		12
		18		0
		27		8
		36		16
		45		24

$x_3 = 1$

$d(x_3)$		$c(k_3)$		$F(x_3 + k_3)$
		6		24
48	+	0	+	12
		9		0
		18		8
		27		16
		36		24

$x_3 = 2$

$d(x_3)$		$c(k_3)$		$F(x_3 + k_3)$
		12		24
		6		12
36	+	0	+	0
		9		8
		18		16
		27		24

$x_3 = 3$

$d(x_3)$		$c(k_3)$		$F(x_3 + k_3)$
		18		24
		12		12
		6		0
24	+	0	+	8
		9		16
		18		24

Рисунок 4.3.

Этап II Этот этап ничем не отличается от предыдущего, поэтому просто приведем соответствующую таблицу (см. таблицу 4.3).

Таблица 4.3.

	$f_2(x_2,k_2)+F_3(x_2+k_2)$											$F_2(x_2)$	k_2^*
k_2 \ x_2	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5		
0	–	–	–	–	–	126	114	102	105	108	111	102	2
1	–	–	–	–	120	93	81	84	87	90	–	81	1
2	–	–	–	114	87	60	63	66	69	–	–	60	0
3	–	–	108	81	54	42	45	48	–	–	–	42	0
4	–	102	75	48	36	24	27	–	–	–	–	24	0
5	116	89	62	50	38	26	–	–	–	–	–	26	0

Этап I На последнем этапе нам надо учесть издержки, которые влечет за собой управление k_0, а не только k_1. Заметим, что при известном состоянии x_1 управление k_0 определено однозначно:

$$k_0 = x_1 - x_0 = x_1 - 2.$$

Таким образом, у нас возникает функция

$$f_1(x_1,k_0,k_1) = f_1(x_1,x_1-2,k_1) = c(x_1-2) + d_1(x_1) + c(k_1).$$

Здесь мы перечислили издержки в порядке их возникновения. Заполняем таблицу 4.4, аналогичную предыдущим.

Таблица 4.4.

	$f_1(x_1,k_0,k_1)+F_2(x_1+k_1)$											$F_1(x_1)$	k_1^*
k_1 \ x_1	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5		
0	–	–	–	–	–	150	138	126	117	108	119	108	4
1	–	–	–	–	138	111	99	90	81	92	–	81	3
2	–	–	–	126	99	72	63	54	65	–	–	54	2
3	–	–	129	102	75	51	42	53	–	–	–	42	1
4	–	152	125	98	74	50	61	–	–	–	–	50	0
5	175	148	121	97	73	69	–	–	–	–	–	69	0

Поскольку $F_1(x_1)$ – это наименьшие издержки при условии, что в начале I этапа система находится в состоянии x_1, нам остается найти

$$\min_{x_1\in[0;5]} F_1(x_1).$$

Искомый минимум равен 42. Он достигается при x_1^* = 3 (то есть k_0^* = 1) и k_1^* =1.

Отсюда $x_2^* = 4$ и $k_2^* = 0$, $x_3^* = 4 + 0 = 4$, $k_3^* = -2$, $x_4^* = 4 - 2 = 2$, $k_4^* = 0$. Итак, оптимальный набор управлений имеет вид $k_0^* = 1$, $k_1^* =1$, $k_2^* =0$, $k_3^* =-2$, $k_4^* = 0$. Ему соответствует набор состояний $x_0^* = 2$, $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$, $x_3^* = 4$, $x_4^* = 2$ ($x_5^* =2$).

Заметим, что в этой задаче можно было бы ввести дополнительный нулевой этап, к которому можно отнести состояние x_0 и управление k_0. Тогда таблица 4.4 распалась бы на две, причем последняя, пятая таблица состояла бы из одной строки, так что нам не пришлось бы искать, в какой строке издержки достигают минимума. (На практике чаще всего именно так и делается.) Но если бы мы решали нашу задачу методом прямой прогонки, то последняя из таблиц непременно выглядела бы так же, как таблица 4.4, причем разбить эту таблицу на две было бы уже невозможно, так как нам неизвестно, чему равно x_5. В этом случае введенное нами ограничение $x_i \in [0;5]$ становится существенным: не будь его, нам пришлось бы рассматривать таблицу с бесконечным числом строк. Именно по этой причине методом обратной прогонки обычно решаются задачи с известным начальным состоянием, а методом прямой прогонки - задачи с известным конечным состоянием. Если известны оба состояния: и начальное, и конечное (как это было в предыдущем разделе), то годятся оба метода. Посмотрим, как выглядит задача о найме работников в этом случае.

Пример 4.2. Пусть к условиям примера 4.1 добавляется еще одно требование: к началу пятого месяца на предприятии вновь должны остаться два работника. Как изменится в этом случае решение примера 4.1?

При известном x_5 управление k_4 однозначно определяется состоянием x_4, а именно $k_4 = 2 - x_4$. Поэтому в таблице 4.1, соответствовавшей последнему этапу, надо оставить ровно по одному числу в каждой строчке (см. табл. 4.5).

Таблица 4.5.

	$f_4 = d_4(x_4) + c(k_4)$											$F_4(x_4)$	k_4^*
x_4 \ k_4	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5		
0	–	–	–	–	–	–	–	42	–	–	–	42	2
1	–	–	–	–	–	–	21	–	–	–	–	21	1
2	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	0	0
3	–	–	–	–	14	–	–	–	–	–	–	14	–1
4	–	–	–	28	–	–	–	–	–	–	–	28	–2
5	–	–	42	–	–	–	–	–	–	–	–	42	–3

Теперь заполним таблицу 4.6, соответствующую третьему этапу.

Таблица 4.6.

x_3 \ k_3	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$F_3(x_3)$	k_3^*
	$f_3(x_3,k_3)+F_4(x_3+k_3)$												
0	–	–	–	–	–	102	90	78	101	124	147	78	2
1	–	–	–	–	96	69	57	80	103	126	–	57	1
2	–	–	–	90	63	36	59	82	105	–	–	36	0
3	–	–	84	57	30	38	61	84	–	–	–	30	–1
4	–	78	51	24	32	40	63	–	–	–	–	24	–2
5	72	45	18	26	34	42	–	–	–	–	–	18	–3

Обратим внимание, что $F_3(x_3)$ и k_3^* совпадают с найденными в таблице 4.2. Конечно, это получилось достаточно случайно: дело в том, что в таблице 4.6 $x_3+k_3^*$ равно 2, из-за чего в таблице 4.5 $x_4=2$, $k_4^*=0$ и $F_4(x_4)=0$ – единственное значение, одинаковое в таблицах 4.5 и 4.1! Во всяком случае, мы можем не заполнять таблицы, соответствующие следующим этапам: они совпадут с таблицами 4.3 и 4.4. Поэтому минимально возможные издержки составят 42 ден. ед. при $x_1^*=3$ и $k_1^*=1$. Возвращаясь к предыдущим этапам, находим остальные x_i^* и k_i^*, которые совпадут с состояниями и управлениями из примера 4.1. Таким образом, $k^*=(1,1,0,-2,0)$ и $x^*=(2,3,4,4,2,2)$. (У нас x^* содержит шесть координат, так как мы учли еще и x_5.)

Заметим, что при решении нашей задачи мы выбирали этапы таким образом, чтобы каждый этап начинался с некоторого состояния системы, а заканчивался управлением. Исключение составлял первый этап, но если разбить его на две части – первую (x_1 и k_1) и нулевую (x_0 и k_0), то и здесь это правило остается в силе. Теперь попробуем решить нашу задачу, изменив разбиение на этапы и определяя их так, как показано на рисунке 4.4. (Для простоты предположим, что мы находимся в условиях примера 4.2.)

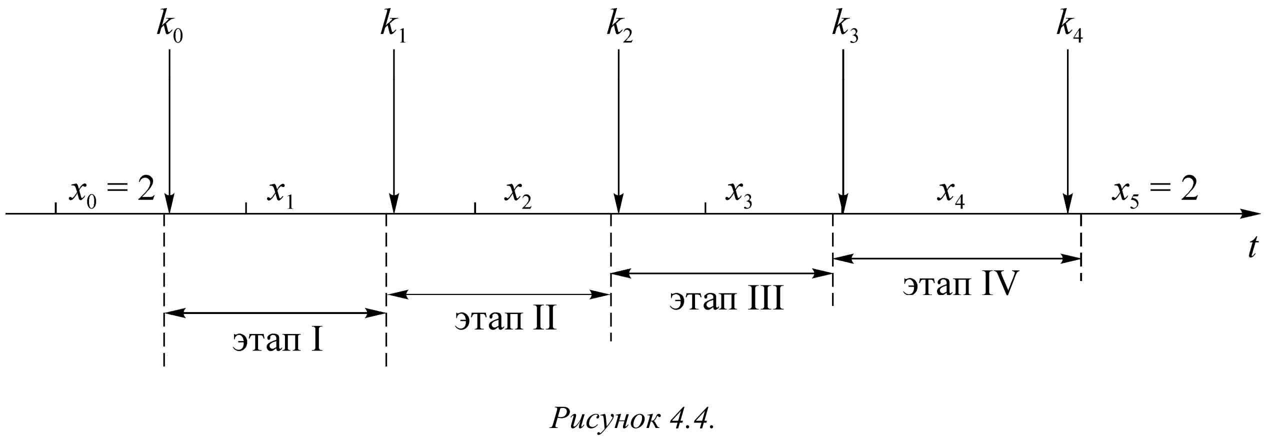

Рисунок 4.4.

Заполнить таблицу, соответствующую этапу IV, несложно: каждый раз нам известны k_3 и x_4, следовательно, мы находим $k_4 = x_5 - x_4$ и функцию издержек

$$f_4(k_3, x_4, k_4) = c(k_3) + d_4(x_4) + c(k_4) = c(k_3) + d_4(x_4) + c(2 - x_4).$$

Результаты вычислений записаны в таблице 4.7.

Таблица 4.7.

x_4 \ k_3	$f_4(k_3, x_4, k_4)$											$F_4(x_4)$	k_3^*
	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5		
0	72	66	60	54	48	42	51	60	69	78	87	42	0
1	51	45	39	33	27	21	30	39	48	57	66	21	0
2	30	24	18	12	6	0	9	18	27	36	45	0	0
3	44	38	32	26	20	14	23	32	41	50	59	14	0
4	58	52	46	40	34	28	37	46	55	64	73	28	0
5	72	66	60	54	48	42	51	60	69	78	87	42	0

Заметим, что на сей раз мы рассматриваем любые комбинации x_4 и k_3, так как нам неизвестно, чему равно x_3. Впрочем, если немного «заглянуть вперед» и вспомнить, что $x_3 = x_4 - k_3 \in [0; 5]$, то мы поймем, что некоторые ячейки в нашей таблице соответствуют «невозможным ситуациям» и их следует убрать. (В таблице 4.7 эти ячейки закрашены серым цветом.) Однако на значения $F_4(x_4)$ это не повлияет.

Сложности начнутся при заполнении следующей таблицы. Действительно, при известных x_3 и k_2 мы ничего не можем сказать о том, каким будет x_4, так как это зависит от k_3, а управление k_3 может оказаться каким угодно. Это означает, что мы не сможем воспользоваться результатами таблицы 4.7, потому что нам неизвестно, которую из ее строчек следует выбрать. Может быть, стоит поменять ролями управления и состояния и находить минимальные значения не по строкам, а по столбцам? К сожалению, и такой вариант оказывается неудачным, потому что мы не сможем найти k_3 по известным k_2 и x_3. Таким образом, мы можем сформулировать следующее важное правило.

При разбиении задачи на этапы надо следить, чтобы каждый этап включал в себя одно управление системой и одно из ее последовательных состояний, причем это управление и это состояние должны однозначно определять последующее (в методе обратной прогонки) или предыдущее (в методе прямой прогонки) состояние системы.

Вопросы и задания

1. Записать ответ к задаче из примеров 4.1 и 4.2 в виде словесных рекомендаций руководству предприятия. Как можно объяснить этот ответ с эко-

номической точки зрения?

2. Совпадут ли ответы в примерах 4.1 и 4.2, если в примере 4.2 потребовать, чтобы $x_5 = 3$? Можно ли сформулировать правило, позволяющее ответить на этот вопрос, не решая задачи?
3. Решить задачу из примера 4.1, разбив таблицу 4.4 на две разные таблицы так, как это было рекомендовано. Сравнить ответы. Какой из вариантов решения этой задачи проще с алгоритмической точки зрения?
4. Решить задачи из примеров 4.1 и 4.2 методом прямой прогонки. (Считать, что количество сотрудников не превышает пяти человек.)
5. Решить задачу о найме работников в случае, когда $x_5 = 2$, а x_0 неизвестно (но $x_0 \in [0;5]$.) Какой из методов лучше подходит для решения данной задачи: метод прямой или метод обратной прогонки?
6. Решите задачу о найме работников в случае, когда неизвестны ни x_0, ни x_5. (Учтите, что x_0 и x_5 не превосходят 5.)
7. Изменятся ли ответы в задачах из примеров 4.1 и 4.2, если потребовать, чтобы $k_i \in [-2;2]$, т.е. если нельзя принимать на работу или увольнять более двух человек за 1 месяц? Можно ли это выяснить, не решая задачи с новым условием?
8. Пусть в условиях предыдущего задания разрешается принимать на работу и увольнять сотрудников одновременно. Иначе говоря, на каждом этапе имеются два управления: k_i' и k_i'', причем $x_{i+1} = x_i + k_i' - k_i''$. Как в этом случае изменятся таблицы, возникающие при решении задачи? Можете ли Вы описать алгоритм, позволяющий решить задачу о найме работников при этих условиях?
9. Решить (любым способом) следующие задачи о найме работников.

   а) Пусть изначально на предприятии работало 3 человека, оптимальное число сотрудников на следующие 3 месяца составляет 2, 3 и 4 человека, в начале каждого месяца можно уволить не более одного, принять на работу не более двух человек. Через 3 месяца предполагается уволить всех сотрудников. Прием на работу 1 человека обходится в 5 ден. ед., увольнение – в 6 ден. ед. Каждая вакансия приносит 10 ден. ед. убытка, содержание лишнего сотрудника – 2 ден. ед. убытка.

   б) Изначально на предприятии работало 2 человека, оптимальное число сотрудников на следующие три месяца составляет 3, 4 и 2 человека, в начале каждого месяца можно принять на работу или уволить не более двух человек. Прием на работу 1 человека обходится в 6 ден. ед., увольнение – в 5 ден. ед. Каждая вакансия приносит 15 ден. ед. убытка, содержание лишнего сотрудника – 10 ден. ед. убытка.

   в) Изначально на предприятии работало 4 человека, оптимальное число сотрудников на следующие три месяца составляет 1, 5 и 6 человек, в начале каждого месяца можно уволить или принять на работу не более 1 человека. Через 3 месяца предполагается оставить 3 сотрудников. Прием на работу 1 человека обходится в 10 ден. ед., увольнение – в 5 ден. ед. Каждая вакансия приносит 15 ден. ед. убытка, содержание лишнего сотрудника убытков не приносит.

5. Динамические задачи управления запасами

Одна из наиболее известных сфер приложения методов динамического программирования – это так называемая *теория управления запасами*. Она изучает поведение экономических систем снабжения, занимающих как бы промежуточное положение между производителями каких-либо ресурсов и их потребителями. Это могут быть склады, оптовые базы и т. д. Деятельность таких систем сводится к закупке некоторого товара у производителей с целью обеспечения спроса на этот товар у его конечных потребителей. Понятно, что запасов не должно быть слишком много или слишком мало. В первом случае возникают чрезмерные затраты на хранение товара (аренда помещений, амортизация товара в процессе хранения), во втором случае может оказаться, что на складе не найдется нужного товара (а это иногда влечет за собой выплату штрафов, неустоек и т. д.) или же расходы на слишком частое пополнение небольшого запаса окажутся чрезмерно высокими (потому что расходы на оформление заказа и доставку товара часто представляют собой величину постоянную, не зависящую от размера заказа).

Как правило, в задачах управления запасами стремятся минимизировать общие затраты, хотя иногда рассматривают и функцию прибыли, зависящую от разницы между оптовыми и розничными ценами. Возникающие модели существенно зависят от спроса конечных потребителей, который, вообще говоря, представляет собой случайную величину. Мы рассмотрим более простую *детерминированную* модель, в которой предполагается, что нам каким–то образом удалось оценить уровень спроса в любой наперед заданный момент времени. Кроме того, мы будем предполагать, что заказ, посылаемый производителю, обязательно выполняется, независимо от размеров заказа (что в реальности бывает далеко не всегда). Выполнение заказа будем считать мгновенным, то есть временем между оформлением заказа и доставкой товара можно пренебречь. Наконец, для того, чтобы задача допускала поэтапное решение, время должно изменяться дискретно: и выполнение заказа, и продажа товара конечным потребителям происходит в какие-то фиксированные моменты времени t_i, $i = 1, 2, \ldots, T$.

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 5.1. Предположим, что в начале рассматриваемого периода товар на складе отсутствовал. В ближайшие три месяца необходимо будет удовлетворять спрос, возникающий в начале каждого месяца и равный 10 ед. товара в первый и в третий месяцы и 20 ед. товара – во второй. С этой целью в начале каждого месяца необходимо закупать товар. При закупке партии в y ед. товара расходы составляют $20+100y-y^2$ ден. ед., где 20 ден. ед. необходимо заплатить за оформление заказа и аренду транспорта, а $100y-y^2$ стоимость товара (чем больше объем партии, тем дешевле обходится 1 ед. товара). Товар, оставшийся после продажи, можно хранить на складе, причем хранение x ед. товара в течение месяца будет стоить $30 + 50x$ ден. ед., где 30 ден. ед. – плата за аренду помещения, а $50x$ – амортизационные расходы. Определить, сколько товара следует закупать в начале каждого месяца, чтобы минимизировать издержки за весь период.

Обозначим $x_i \geq 0$ – количество товара, лежащего на складе в течение i-ого месяца, $i = 0, 1, 2, 3$. По условию $x_0 = 0$. Это состояния нашей системы. Пусть y_i, $i = 1, 2, 3$ – количество товара, закупаемого в i-ом месяце. Это управления системой. Исходя из условия задачи, можно сразу потребовать, чтобы $y_i \in [0;40]$ (не имеет смысла закупать товар в количестве, превосходящем суммарный спрос за весь период). Наконец, пусть ξ_i – спрос в i-ом периоде. Нам известно, что $\xi_1 = \xi_3 = 10$, $\xi_2 = 20$. Всегда должно выполняться равенство

$$x_i = x_{i-1} + y_i - \xi_i,\ i = 1, 2, 3,$$

то есть в i-ом месяце на складе остается столько товара из общего числа $x_{i-1} + y_i$ (запас + закупки), сколько не удалось продать. Ситуация, которую мы получаем, схематично изображена на рисунке 5.1.

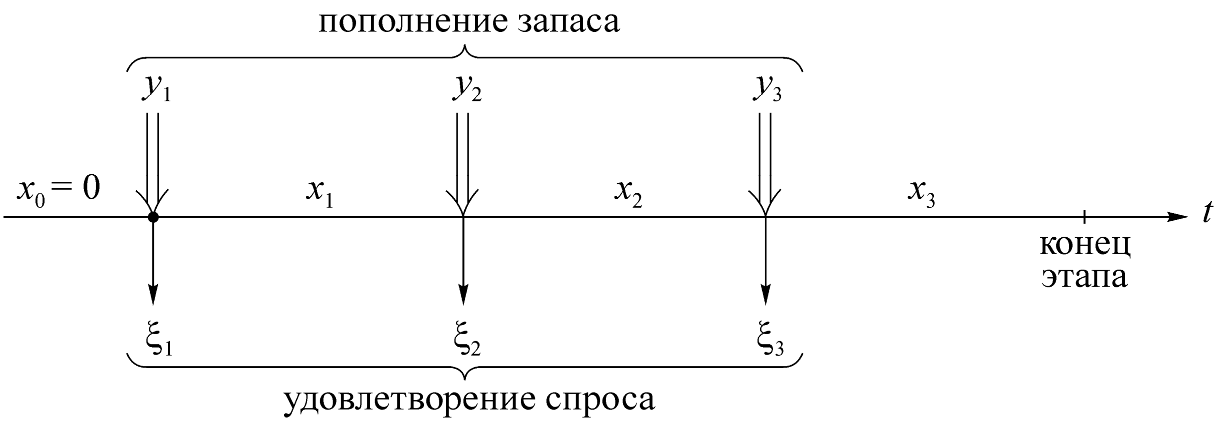

Рисунок 5.1.

Обозначим $c(y_i)$ – расходы на закупку товара (они одинаковы в каждом периоде). По условию

$$c(y_i) = \begin{cases} 0, \text{ если } y_i = 0, \\ 20 + 100y_i - y_i^2, \text{ если } y_i > 0,\ i = 1,2,3. \end{cases}$$

(Хотя это и не оговаривалось, но должно быть понятно, что при отсутствии заказа расходов тоже нет.) Кроме того, обозначим $d(x_i)$ расходы на хранение товара. Тогда

$d(x_i) = 30 + 50x_i,\ i = 1, 2, 3.$

Постараемся решить нашу задачу методами динамического программирования. Поскольку нам известно начальное состояние системы $x_0 = 0$, лучше воспользоваться методом обратной прогонки. Теперь мы должны правильно разбить задачу на этапы. Напомним, что каждый этап характеризуется одним управлением и одним состоянием, причем они должны однозначно определять последующее состояние системы (у нас обратная прогонка!) Например, пара (x_2, y_2) не позволит нам однозначно определить x_3, а пара (x_2, y_3) – позволит: $x_3 = x_2 + y_3 - 10$. Таким образом, третий этап будет включать в себя x_2, y_3 и «добавочное» состояние x_3 (чтобы не выделять его в особый этап). Второй этап будет определяться парой (x_1, y_2), первый – парой (x_0, y_1).

Теперь мы можем поставить дополнительные условия (x_i и y_i – целые числа или числа, кратные 10), которые сделают множества допустимых состояний и допустимых управлений конечными. Тогда нам надо будет заполнить три таблицы, аналогичные тем, что возникали в предыдущих разделах. Однако на сей раз мы попробуем поступить иначе и найти минимум функции, заданной на некотором подмножестве пространства R^6 (в принципе у нас 6 переменных: y_1, x_1, y_2, x_2, y_3 и x_3, связанных некоторыми условиями).

Этап III В обозначениях предыдущих разделов нам надо найти

$$F_3(x_2) = \min_{y_3}\left(d(x_2) + c(y_3) + d(x_2 + y_3 - \xi_3)\right),$$

где $x_2 \geq 0,\ y_3 \in [0; 40],\ x_2 + y_3 - \xi_3 \geq 0$. Последнее неравенство означает, что $x_2 + y_3 \geq 10$. Поскольку $c(y_3)$ задается двумя разными формулами, функция, стоящая под знаком минимума, записывается так:

$$g_3(x_2, y_3) = \begin{cases} 30 + 50x_2 + 30 + 50(x_2 - 10),\ y_3 = 0; \\ 30 + 50x_2 + 20 + 100y_3 - y_3^2 + 30 + 50(x_2 + y_3 - 10),\ y_3 > 0 \end{cases}$$

или

$$g_3(x_2, y_3) = \begin{cases} 100x_2 - 440,\ y_3 = 0; \\ 100x_2 - 420 + 150y_3 - y_3^2,\ y_3 > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

а) Если $x_2 \geq 10$, то возможны оба варианта: $y_3 = 0$ и $y_3 > 0$. Очевидно, наименьшим значением будет $100x_2 - 440$, которое достигается при $y_3^* = 0$.

б) Если $x_2 < 10$, то $y_3 = 0$ невозможно, так как у нас есть условие $x_2 + y_3 \geq 10$. Поскольку $y_3 \in [0; 40]$, а $10 - x_2 \in (0; 10]$, мы видим, что $y_3 \in [10 - x_2; 40]$. Итак,

$$F_3(x_2) = \min_{y_3 \in [10 - x_2;\, 40]}\left(100x_2 - 420 + 150y_3 - y_3^2\right) = 100x_2 - 420 + \min_{y_3 \in [10 - x_2;\, 40]}\left(150y_3 - y_3^2\right).$$

Заметим, что графиком функции $g(y) = 150y_3 - y_3^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз, а вершина $y_0 = 75$. Поскольку $y_3 < 75$, наименьшее значение достигается в самой левой точке, то есть при $y_3 = 10 - x_2$ (см. рис. 5.2).

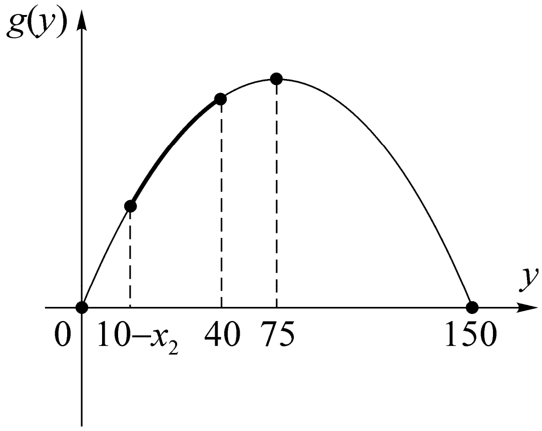

Рисунок 5.2.

Таким образом,

$$F_3(x_2) = 100x_2 - 420 + 150(10 - x_2) - (10 - x_2)^2 = -x_2^2 - 30x_2 + 980 \text{ при } y_3^* = 10 - x_2.$$

Окончательно

$$F_3(x_2) = \begin{cases} -x_2^2 - 30x_2 + 980 \text{ при } y_3^* = 10 - x_2, \text{если } x_2 < 10; \\ 100x_2 - 440 \text{ при } y_3^* = 0, \text{если } x_2 \ge 10. \end{cases} \quad (5.1)$$

Этап II Здесь нам надо найти

$$F_2(x_1) = \min_{y_2}\left(d(x_1) + c(y_2) + F_3(x_1 + y_2 - \xi_2)\right),$$

причем $x_1 \ge 0,\ y_2 \in [0;40],\ x_1 + y_2 - \xi_2 \ge 0$.

Поскольку $c(y_2)$ и $F_3(x_2)$ записываются с помощью двух разных формул, возникают четыре случая.

I. $x_1 \ge 0,\ y_2 = 0,\ x_2 = x_1 + y_2 - \xi_2 \in [0;10)$. Если вспомнить, что $\xi_2 = 20$, то $x_1 \in [20;30)$. В этом случае

$$g_2^I(x_1, y_2) = g_2^I(x_1, 0) = 30 + 50x_1 + 0 + F_3(x_1 - 20).$$

Учитывая, что $x_1 - 20 < 10$, с помощью формул (5.1) находим

$$g_2^I(x_1, 0) = 30 + 50x_1 - (x_1 - 20)^2 - 30(x_1 - 20) + 980 = 1210 + 60x_1 - x_1^2.$$

При фиксированном x_1 это константа, поэтому в данном случае

$$F_2^I(x_1) = \min_{y_2=0}\left(1210 + 60x_1 - x_1^2\right) = 1210 + 60x_1 - x_1^2.$$

II. $x_1 \ge 0,\ y_2 \in (0;40],\ x_2 = x_1 + y_2 - \xi_2 \in [0;10)$. Иначе говоря, $x_1 \ge 0,\ y_2 \in (0;40]$, $x_1 + y_2 \in [20;30)$. Здесь

$$g_2^{II}(x_1, y_2) = 30 + 50x_1 + 20 + 100y_2 - y_2^2 + F_3(x_1 + y_2 - 20) = 30 + 50x_1 + 20 +$$
$$+ 100y_2 - y_2^2 - (x_1 + y_2 - 20)^2 - 30(x_1 + y_2 - 20) + 980 = 1230 + 60x_1 + 110y_2 -$$
$$- x_1^2 - 2y_2^2 - 2x_1y_2.$$

Поскольку при разных x_1 размер заказа y_2 меняется в разных пределах, мы пока не будем находить $F_2^{II}(x_1)$ – минимум этой функции, но сразу заметим, что в тех случаях (при тех x_1), когда существуют и $F_2^I(x_1)$, и $F_2^{II}(x_1)$, первое выражение всегда меньше второго:

$$F_2^{II}(x_1)-F_2^{I}(x_1)\geq 20+110y_2-2y_2^2-2x_1y_2=20+110y_2-2y_2(y_2+x_1)>$$
$$>20+110y_2-2y_2\cdot 30>0.$$

III. $x_1\geq 0,\ y_2=0,\ x_2=x_1+y_2-\xi_2\geq 10$. Иначе говоря, $y_2=0, x_1\geq 30$. Используя вторую из формул (5.1), получаем

$$g_2^{III}(x_1,y_2)=g_2^{III}(x_1,0)=30+50x_1+0+F_3(x_1-20)=30+50x_1+100(x_1-20)-440=$$
$$=150x_1-2410.$$

Это выражение зависит только от x_1, следовательно,

$$F_2^{III}(x_1)=150x_1-2410.$$

IV. $x_1\geq 0,\ y_2\in(0;40],\ x_2=x_1+y_2-\xi_2\geq 10$, то есть $x_1\geq 0,\ y_2\in(0;40],\ x_1+y_2\geq 30$. На сей раз

$$g_2^{IV}(x_1,y_2)=30+50x_1+20+100y_2-y_2^2+F_3(x_1+y_2-20)=30+50x_1+20+$$
$$+100y_2-y_2^2+100(x_1+y_2-20)-440=-2390+150x_1+200y_2-y_2^{\,2}.$$

Как и в случае II, мы пока не будем находить минимальное значение этой функции, так как мы не знаем, в каких пределах изменяется y_2, но заметим, что $F_2^{III}(x_1)$ всегда меньше, чем $F_2^{IV}(x_1)$ (при тех x_1, когда возможны оба этих случая):

$$F_2^{IV}(x_1)-F_2^{III}(x_1)\geq 20+200y_2-y_2^2>0,\ y\in(0;40].$$

Теперь нам надо при каждом фиксированном x_1 выяснить, какие из четырех рассмотренных случаев возможны и в каких пределах каждый раз меняется y_2. Для удобства изобразим соответствующие области на плоскости x_1Oy_2 (см. рис. 5.3).

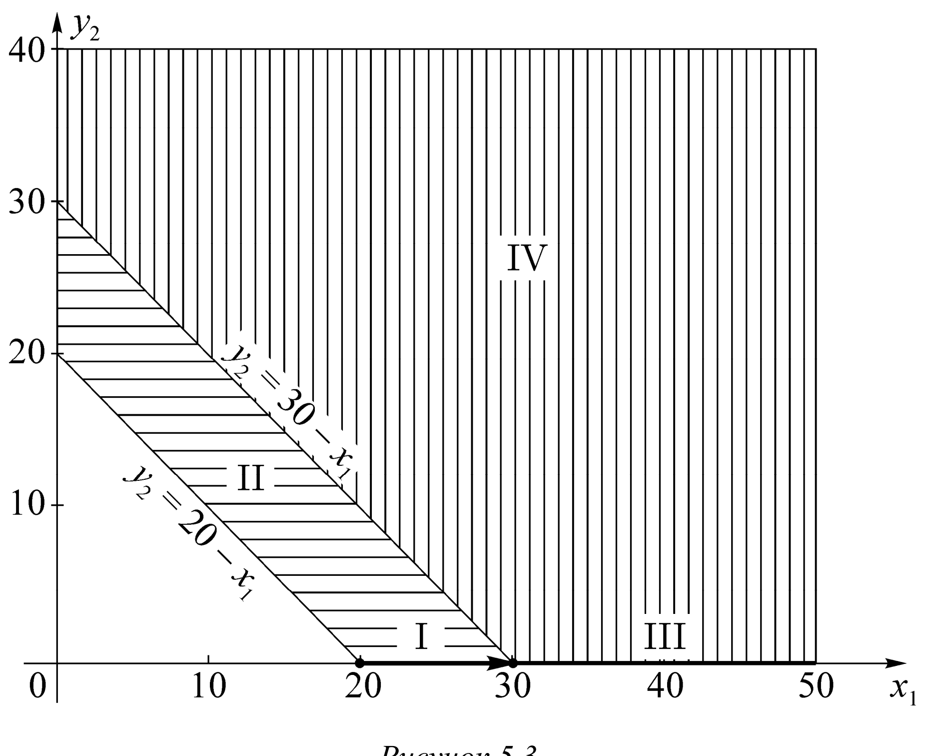

Рисунок 5.3.

Итак, первое и третье множества – это полуинтервалы, принадлежащие оси Ox_1, причем точка (30; 0) входит в третье множество, а не в первое. Точно так же прямая $y_2 = 30 - x_1$ входит в четвертое множество, а не во второе. Теперь легко понять, что у нас есть три принципиально разных варианта.

1. Если $x_1 \in [0; 20)$, то возможны случаи II и IV. Здесь

$$F_2^{II}(x_1) = \min_{y_2 \in [20-x_1; 30-x_1)} g_2^{II}(x_1, y_2) = \min_{y_2 \in [20-x_1; 30-x_1)} \left(1230 + 60x_1 + 110y_1 - x_1^2 - 2y_2^2 - 2x_1y_2\right).$$

Критическая точка – это корень уравнения

$$110 - 4y_2 - 2x_1 = 0, \text{ то есть } y_2 = 55 - 0{,}5x_1.$$

Вместе с тем очевидно, что это точка максимума, так как производная в этой точке меняет знак с плюса на минус. Сравниваем значения на концах отрезка $y_2 = 20 - x_1$ и $y_2 = 30 - x_1$.

$$g_2^{II}(x_1, 20 - x_1) = 2630 - 10x_1 - x_1^2,$$

$$g_2^{II}(x_1, 30 - x_1) = 2730 + 10x_1 - x_1^2 > g_2^{II}(x_1, 20 - x_1).$$

Итак,

$$F_2^{II}(x_1) = 2630 - 10x_1 - x_1^2 \text{ при } y_2 = 20 - x_1.$$

Аналогично

$$F_2^{IV}(x_1) = \min_{y_2 \in [30-x_1; 40]} g_2^{IV}(x_1, y_2) = \min_{y_2 \in [30-x_1; 40]} \left(-2390 + 150x_1 + 200y_2 - y_2^2\right) =$$

$$= -2390 + 150x_1 + \min_{y_2 \in [30-x_1; 40]} \left(200y_2 - y_2^2\right).$$

Когда y_2 меняется в указанных пределах, функция $200y_2 - y_2^2$ возрастает ($200 - 2y_2 > 0$), так что интересующий нас минимум достигается при $y_2 = 30 - x_1$.

Итак,

$$F_2^{IV}(x_1) = g_2^{IV}(x_1, 30 - x_1) = 2710 + 10x_1 - x_1^2.$$

Наконец,

$$F_2(x_1) = \min\left\{F_2^{II}(x_1), F_2^{IV}(x_1)\right\} = F_2^{II}(x_1) = 2630 - 10x_1 - x_1^2.$$

Соответствующее $y_2^* = 20 - x_1$.

2. Если $x_1 \in [20; 30)$, то возможны случаи I, II и IV. Как уже отмечалось, $F_2^{I}(x_1) < F_2^{II}(x_1)$, так что нам остается сравнить $F_2^{I}(x_1) = 1210 + 60x_1 - x_1^2$ и $F_2^{IV}(x_1)$, которое вычисляется так же, как и в предыдущий раз, потому что y_2 изменяется в тех же пределах. Находим разность

$$F_2^{IV}(x_1) - F_2^{I}(x_1) = 2710 + 10x_1 - x_1^2 - \left(1210 + 60x_1 - x_1^2\right) = 1500 - 50x_1 = 50(30 - x_1) > 0.$$

Это означает, что

$$F_2(x_1) = \min\left\{F_2^{I}(x_1), F_2^{II}(x_1), F_2^{IV}(x_1)\right\} = F_2^{I}(x_1) = 1210 + 60x_1 - x_1^2 \text{ при } y_2^* = 0.$$

3. Если $x_1 \geq 30$, то возможны случаи III и IV. Поскольку $F_2^{III}(x_1) < F_2^{IV}(x_1)$, на сей раз

$$F_2(x_1) = F_2^{III}(x_1) = 150x_1 - 2410 \text{ при } y_2^* = 0.$$

Окончательно

$$F_2(x_1) = \begin{cases} 2630 - 10x_1 - x_1^2 \quad \text{при } y_2^* = 20 - x_1, \text{ если } x_1 \in [0;20); \\ 1210 + 60x_1 - x_1^2 \quad \text{при } y_2^* = 0, \text{ если } x_1 \in [20;30); \\ 150x_1 - 2410 \quad \text{при } y_2^* = 0, \text{ если } x_1 \geq 30. \end{cases} \qquad (5.2)$$

Этап I Поскольку $x_0 = 0$, нам необходимо найти

$$F_1(x_0) = F_1(0) = \min_{y_1}\left(c(y_1) + F_2(y_1 - \xi_1)\right),$$

где $y_1 \in [0;40]$, $y_1 - \xi_1 \geq 0$. (На нулевом этапе затраты на хранение запаса отсутствуют.) Иначе говоря,

$$F_1(x_0) = F_1(0) = \min_{y_1 \in [10;40]}\left(c(y_1) + F_2(y_1 - 10)\right).$$

Рассматриваем три случая.

I. $y_1 \in [10;30)$. Это означает, что $x_1 = y_1 - 10 \in [0;20)$ и в силу (5.2)

$$F_2(x_1) = 2630 - 10x_1 - x_1^2.$$

Находим

$$g_1^I(0, y_1) = 20 + 100y_1 - y_2^2 + 2630 - 10(y_1 - 10) - (y_1 - 10)^2 = 2650 + 110y_1 - 2y_1^2.$$

Графиком этой функции служит парабола с вершиной в точке $y_1^0 = 27{,}5$ и ветвями, направленными вниз. Поскольку эта парабола симметрична относительно вертикальной прямой $y_1 = 27{,}5$, минимальное значение достигается в наиболее удаленной от вершины точке, то есть при $y_1 = 10$ (см. рис. 5.4).

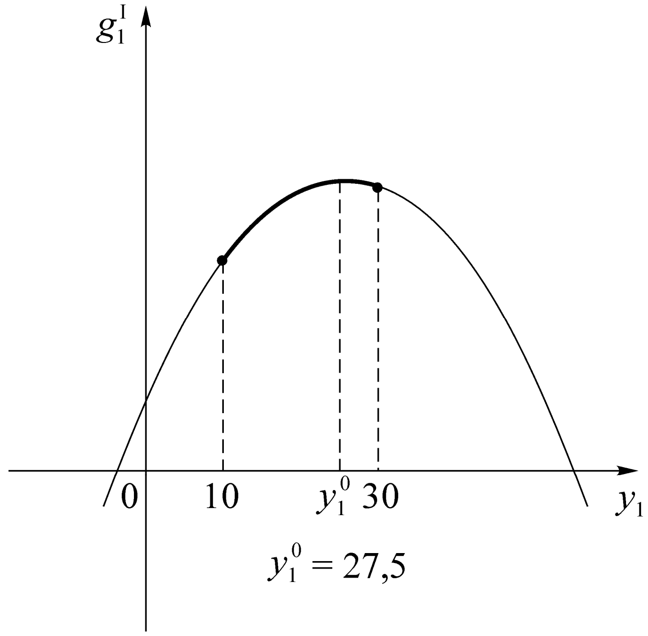

Рисунок 5.4.

Таким образом,

$$F_1^I(0) = g_1^I(0,10) = 3550.$$

II. $y_1 \in [30;40)$ и $x_1 \in [20;30)$. В этом случае из (5.2) находим, что

$$F_2(x_1) = 1210 + 60x_1 - x_1^2 \text{ и}$$

$$g_1^{II}(0,\ y_1) = 20 + 100y_1 - y_1^2 + 1210 + 60(y_1 - 10) - (y_1 - 10)^2 = 530 + 180y_1 - 2y_1^2.$$

При $y_1 \in [30;40)$ эта функция возрастает, так что

$$F_1^{II}(0) = \min_{y_1 \in [30;40)} g_1^{II}(0, y_1) = g_1^{II}(0,30) = 4130.$$

III. $y_1 = 40$. В этом случае $x_1 = 30$ и $F_2(x_1) = 150x_1 - 2410$. Таким образом,

$$g_1^{III}(0,40) = 20 + 100 \cdot 40 - 40^2 + 150 \cdot 30 - 2410 = 4510 = F_1^{III}(0).$$

Теперь

$$F_1(0) = \min\{F_1^I(0), F_1^{II}(0), F_1^{III}(0)\} = F_1^I(0) = 3550 \text{ при } y_1^* = 10.$$

Поскольку $y_1^* = 10$, $x_1^* = y_1^* - 10 = 0$. Используя формулы (5.2), находим $y_2^* = 20 - x_1^* = 20$ и $x_2^* = y_2^* - 20 = 0$. Теперь из (5.1) следует, что $y_3^* = 10 - x_2^* = 10$ и $x_3^* = 0$. Иначе говоря, на каждом этапе нам надо закупать то количество товара, которое позволит удовлетворить текущий спрос, не создавая никаких запасов. Такой ответ возникает, в частности, из-за того что все функции издержек выпуклы вверх. (Напомним, что линейная функция считается выпуклой вверх в нестрогом смысле.) У выпуклой вверх функции критические точки – всегда точки максимума, а минимум достигается на границе множества, поэтому в нашей задаче y_i^* должны совпадать с величиной спроса ξ_i или с суммарным спросом за несколько этапов.

Заметим, что попытка решить задачу из примера 5.1 аналитическими методами привела к достаточно громоздким вычислениям, хотя функции издержек были довольно простыми (многочлены первой и второй степени), да и число этапов было невелико. Поэтому в подавляющем большинстве случаев такие задачи решают на конечном множестве переменных, накладывая на них дополнительные требования (например, целочисленности).

Вопросы и задания

1. К какому виду затрат (хранение, доставка, собственно стоимость товара) относятся:
   а) затраты на топливо для автомобиля;
   б) арендная плата;
   в) плата за электроэнергию;
   г) заработная плата шофера;
   д) заработная плата кладовщика;
   е) плата за отопление склада;
   ж) стоимость упаковки товара (разница между ценой брутто и ценой нетто);

з) затраты на ремонт автомобиля и покупку запчастей.

2. В условиях примера 5.1 найдите $F_2^{II}(x_1, y_2)$, когда $x_1 \in [20;30)$.

   Указание. Найдите, в каких пределах изменяется y_2.

3. Заметим, что в примере 5.1 не все области, изображенные на рисунке 5.3, являются замкнутыми, а это означает, что минимум функции может и не существовать. Как бы Вы поступили, если бы оказалось, что при $x_1 \in [0;20)$ значение $g_2^{II}(x_1, 30 - x_1) < g_2^{II}(x_1, 20 - x_1)$? (Напомним, что $y_1 \in [20 - x_1; 30 - x_1)$.)

4. Пусть в условиях примера 5.1 известно, что $x_3 = 0$, а x_0 не определено. Решите возникающую задачу методом прямой прогонки.

   Указание. 1) Подумайте, на какие этапы разбивается задача в этом случае. 2) Учитывая тот факт, что $\xi_1 = \xi_3$, а функции издержек на всех этапах выглядят одинаково, определите, как можно воспользоваться уже найденными значениями $F_i(x_i)$.

5. Решите задачу из примера 5.1 на конечном множестве управлений, потребовав, чтобы y_i принимали значения, кратные 10.

6. Решите задачу из задания 5, если спрос возникает мгновенно в середине периода, то есть первую половину каждого периода приходится хранить запас, равный $x_{i-1} + y_i$, а затем запас уменьшается на ξ_i единиц.

   Указание. Покажите, что затраты на хранение товара на *i*-ом этапе составляют

$$d_i(x_i) = \frac{1}{2} d(x_{i-1} + y_i) + \frac{1}{2} d(x_{i-1} + y_i - \xi_i).$$

7. Пусть в задаче из задания 5 спрос удовлетворяется непрерывно и равномерно, то есть размер запаса изменяется так, как показано на рисунке 5.5.

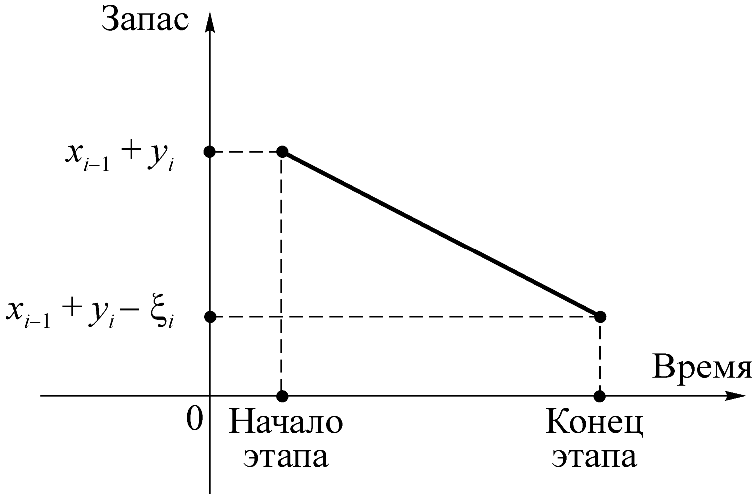

Рисунок 5.5.

Покажите, что в этом случае расходы на хранение запаса равны $d\left(x_{i-1}+y_i-\frac{1}{2}\xi_i\right)$, то есть можно считать запас постоянной величиной, равной среднему арифметическому двух крайних значений. Как изменятся расходы на хранение, если и заказ y_i удовлетворяется непрерывно и равномерно в течение всего этапа?

8. Пусть в задаче из задания 5 мы отказались от требования $x_{i-1}+y_i \ge \xi_i$. Это означает, что допускается дефицит товара. В случае, когда $\xi_i > x_{i-1}+y_i$, мы продаем весь имеющийся товар ($x_i = 0$) и выплачиваем штраф, равный

   $$50(\xi_i-(x_{i-1}+y_i)),$$

   т.е. 50 ден. ед. за каждую единицу дефицита. Найдите оптимальные размеры заказов в этом случае.

6. Заключительные замечания

Изученные нами методы динамического программирования применяются при оптимизации деятельности *управляемых систем*, в частности, экономических. Системы, допускающие анализ методами динамического программирования, должны обладать следующими свойствами.

1. В каждый момент времени изучаемая система находится в некотором *состоянии x.* Множество всех возможных состояний *x* называется *множеством допустимых состояний.* Его можно отождествить с каким-либо числовым множеством, в подавляющем большинстве случаев – конечным.

2. Поставленная задача интерпретируется как многошаговый процесс, каждый шаг (этап) которого состоит из принятия *решения*, приводящего к *изменению состояния* системы. Решение понимается как выбор *управляющего воздействия* или *управления k*, принадлежащего *множеству допустимых управлений.* Как и множество допустимых состояний, оно конечно и отождествляется с каким-то числовым множеством. Управляющие воздействия осуществляются в дискретные моменты времени, соответствующие этапам решения задачи. Количество таких этапов конечно (конечный *горизонт планирования*).

3. Вектор $(k_1, k_2, ..., \ldots k_n)$, составленный из управлений, выбранных на 1, 2, …, *n*-ом этапах, называется *планом задачи* или *стратегией управления.* Каждому плану задачи соответствует вектор состояний $(x_1, x_2, ..., \ldots x_n)$, называемый *траекторией поведения системы.* Компоненты вектора состояний не меняют своих свойств в зависимости от этапа (множество допустимых состояний *X* всегда одинаково, чего нельзя сказать о множестве допустимых управлений).

4. Состояние x_i, в котором оказывается система после принятия *i*-го решения, зависит только от управления k_i и предыдущего состояния x_{i-1}. Это важное свойство, центральное в теории динамического программирования, называется

отсутствием последействия. Отсутствие последействия означает, что начальное состояние объекта x_0 и план задачи $(k_1, k_2, ..., \ldots k_n)$ однозначно определяют траекторию системы $(x_1, x_2, ..., \ldots x_n)$.

5. Деятельность системы оценивается *аддитивной целевой функцией* вида

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n),$$

где $f(x_i)$ характеризует работу системы на *i*-ом этапе. *Оптимальное управление* при заданном начальном состоянии x_0 сводится к выбору *оптимального плана* k^*, при котором достигается максимум функции $f(x)$.

Базовый принцип динамического программирования – это *принцип оптимальности Беллмана.* С математической точки зрения он представляет собой равенство (1.1). Определения, которые мы дали в этом разделе, позволяют сформулировать этот принцип словесно.

Оптимальная стратегия управления должна удовлетворять следующему условию: каково бы ни было начальное состояние x_{i-1} на i-ом шаге и выбранное на этом шаге управление k_i, последующие управленческие решения должны быть оптимальны по отношению к состоянию x_i*, которое достигается в результате решения, принятого на i-ом шаге.*

Вопросы и задания

1. Для экономических систем, изученных в примерах 3.1, 4.1 и 5.1, опишите множества допустимых состояний и управлений, укажите оптимальные планы и траектории. Сколько всего допустимых планов имеют эти системы?
2. Прямой или обратной прогонке соответствует принцип оптимальности Беллмана, сформулированный в этом разделе? Как следует его видоизменить для второго метода?
3. Предположим, что состояние системы на каждом шаге характеризуется не одним числом, а вектором $x_i = (x_i^1, x_i^2, ..., \ldots x_i^m)$, то есть множество допустимых состояний $X \subseteq R^m$, причем
   $$x_i = \varphi(x_{i-1}, k_i),$$
   но нельзя найти такой набор функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$, чтобы
   $$x_i^j = \varphi_j(x_{i-1}^j, k_i).$$
   Можно ли применить методы динамического программирования в этом случае?
   Что изменится, если многомерными будут не состояния, а управления?
4. Можете ли Вы предложить какой-нибудь способ, позволяющий обобщить методы динамического программирования на случай непрерывного времени?
5. Можно ли сказать, что принцип отсутствия последействия выполняется
   а) в задаче 4.1 о найме работников, если при увольнении сотрудника,

проработавшего более трех месяцев, ему выплачивается дополнительная компенсация;

б) в задаче 5.1 управления запасами, если производители предоставляют скидки своим постоянным клиентам (например, тем, кто каждый месяц покупает у них товар на сумму, превышающую некоторое значение), а товар, лежащий на складе более двух месяцев, приходится уценивать;

в) в задаче 3.1 о капиталовложениях, если предприятие №1 отказывается иметь дело с инвесторами, вложившими деньги в предприятие №3?

6. Приведите примеры экономических систем, в которых принцип отсутствия последействия выполняется (или последействие пренебрежимо мало), и систем, в которых этот принцип не выполняется.

Литература

[1] Конюховский. Исследование операций. С–Пб: Питер, 2000.

[2] Таха Х. Исследование операций. М: Мир, 1985.